

Fale.

Elementy optyki geometrycznej i falowej.

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Fala

Fala to rozchodzące się w przestrzeni drganie substancji (**fala sprężysta**) lub pola (drganie pola elektromagnetycznego to **fala elektromagnetyczna**).

Fala elektromagnetyczna jest prawie sinusoidalną falą z fazą, która zmienia się w sposób przypadkowy w czasie!!!

Jeżeli drgania substancji odbywają się wzdłuż kierunku rozchodzenia się fali to jest to **fala podłużna**.

Jeżeli drgania substancji odbywają się prostopadle do kierunku rozchodzenia się fali to jest to **fala poprzeczna**.

Fale biegnące w odróżnieniu od **fal stojących** przenoszą energię w przestrzeni.

W ciałach stałych występują zarówno fale poprzeczne jak i podłużne, natomiast w cieczach i gazach - tylko fale podłużne.

Miejsce geometryczne punktów drgających w tej samej fazie to **powierzchnia falowa**.

Fala płaska posiada powierzchnie falowe w postaci równoległych płaszczyzn w przestrzeni trójwymiarowej lub linii równoległych jeżeli fala rozchodzi się po powierzchni.

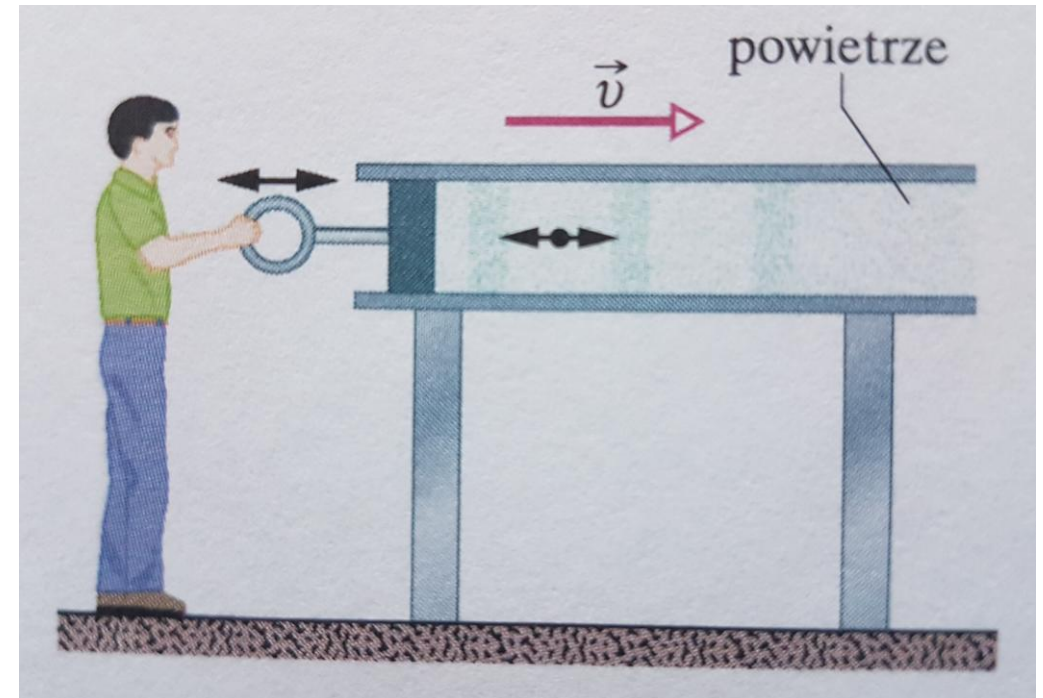
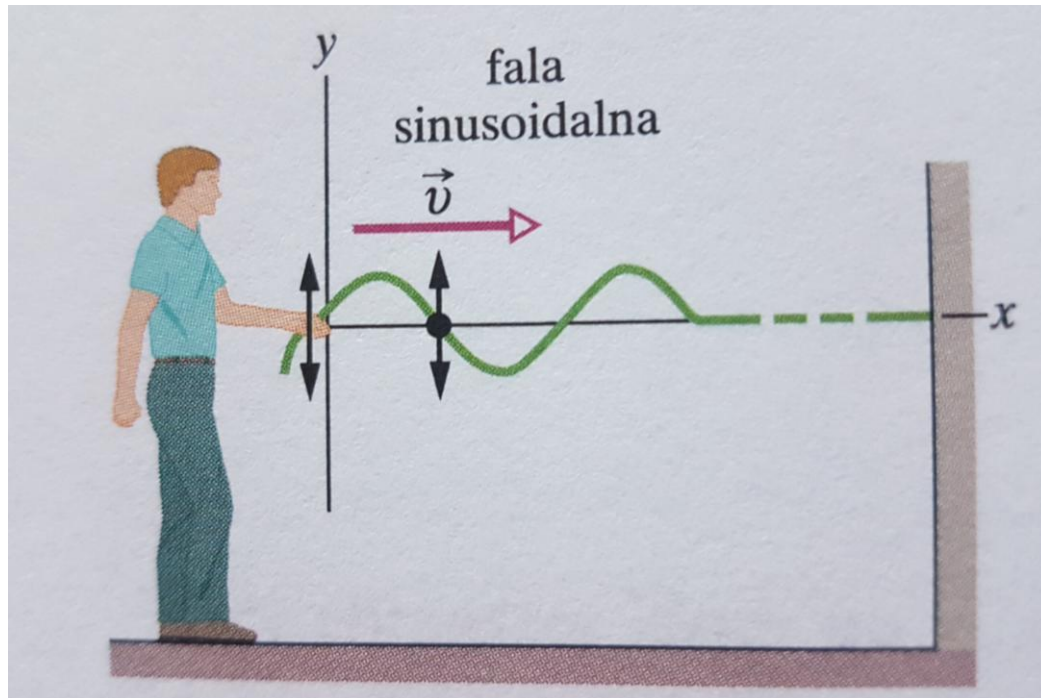
Fala kulista posiada powierzchnie falowe mające kształt współśrodkowych powierzchni kulistych.

Fale uderzeniowe to fale sprężyste o dużych amplitudach.

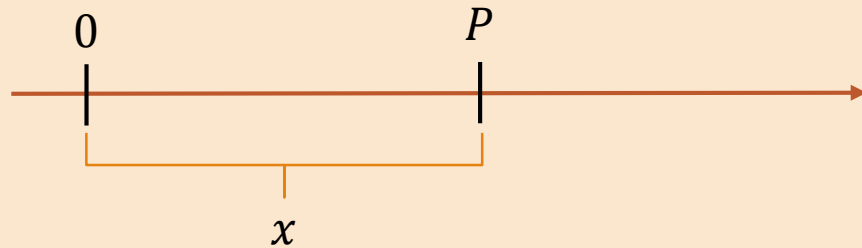
Fale dźwiękowe to fale sprężyste o małych amplitudach.

Promień fali to linia, do której styczna (w każdym punkcie linii) pokrywa się z kierunkiem rozchodzenia się fali (w ośrodku jednorodnym promienie to linie proste).

Fala poprzeczna i podłużna



Równanie fali harmoniczej płaskiej



Drganie w punkcie 0:

$$s_0 = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Czas potrzebny na przebycie przez falę drogi x :

$$t' = \frac{x}{v}$$

Drganie w punkcie P :

$$s = A \sin[\omega(t - t') + \varphi]$$

$$s = A \sin \left[\left(\omega t - \overset{\text{liczba falowa } k}{\frac{\tilde{\omega}}{v}} x \right) + \varphi \right]$$

$$s = A \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

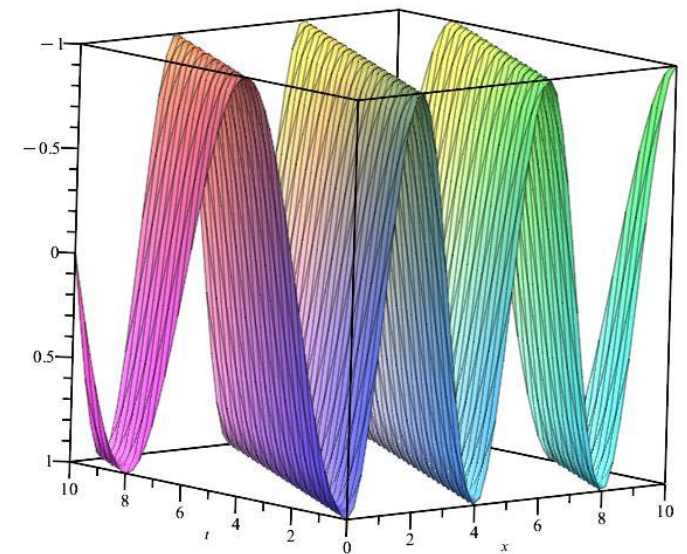
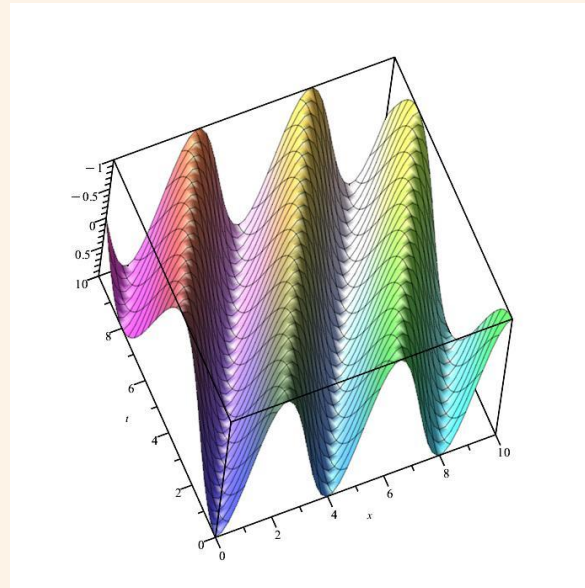
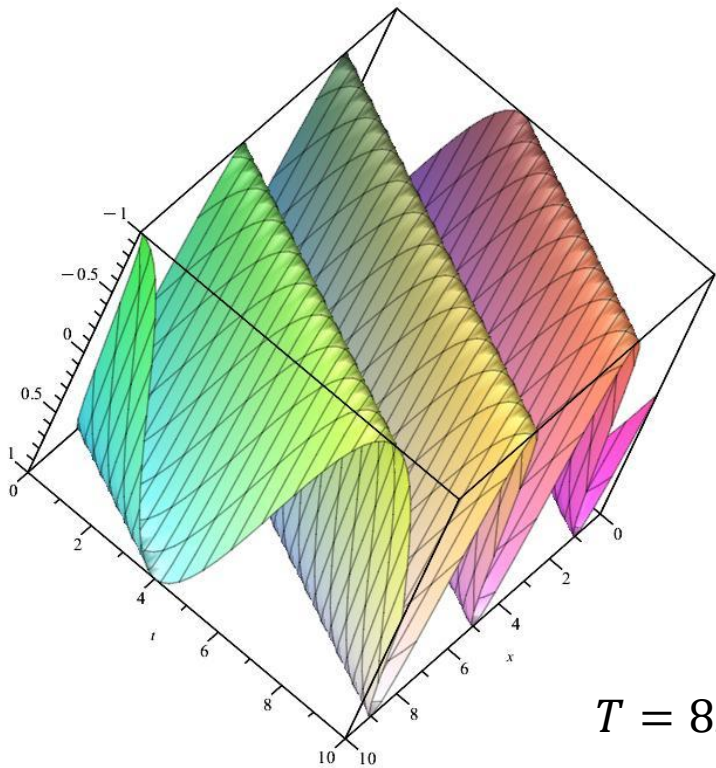
$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

λ – **długość fali** czyli odległość między dwoma najbliższymi punktami ośrodka różniącymi się fazą początkową drgań o 2π

Jeżeli nie ma rozpraszania energii to: $A_0 = A$

Fala płaska

$$s(x, t) = A \cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}t - \frac{\pi}{2}x\right)$$

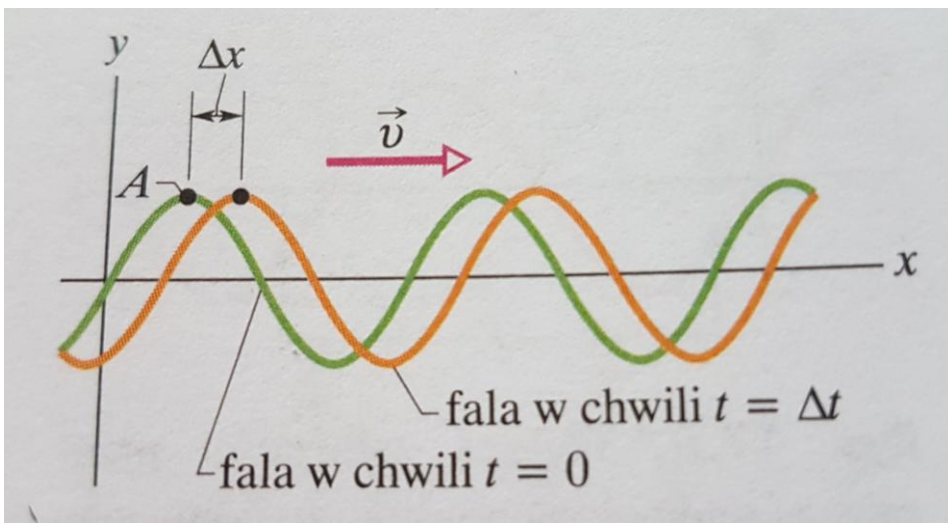


Prędkość fazowa fali sinusoidalnej

Faza Φ fali:

$$\Phi = \omega t - kx + \varphi$$

Prędkość rozchodzenia się fali jest równa prędkości przesuwania się stałej wartości fazy fali:



D. Holliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki T. 2 PWN, W-wa 2011 str. 128

$$\Phi = \omega t - kx + \varphi = \text{const.}$$

$$\omega - k \frac{dx}{dt} = 0$$

Prędkość rozchodzenia się fali:

$$v = \left(\frac{dx}{dt} \right)_{\Phi=\text{const}} = \frac{\omega}{k}$$

Dla fal sinusoidalnych prędkość ruchu czoła fali jest równa prędkości rozchodzenia się fali i nazywana jest prędkością fazową fali.

Postać wykładnicza równania fali płaskiej

$$s = A \sin(\omega t - kl + \varphi)$$

Sinusoidalna fala płaska rozchodząca się w dowolnym kierunku:

$$s = A \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \varphi)$$

\vec{k} - wektor falowy, tj. wektor skierowany wzdłuż promienia fali o długości zadanej liczbą falową, dla fali płaskiej nie zależy od wyboru punktu ośrodka

\vec{r} - wektor wodzący punktu ośrodka

Sinusoidalna fala płaska w postaci zespolonej (sens fizyczny ma tylko część rzeczywista):

$$\tilde{s} = \tilde{A} e^{i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})}$$

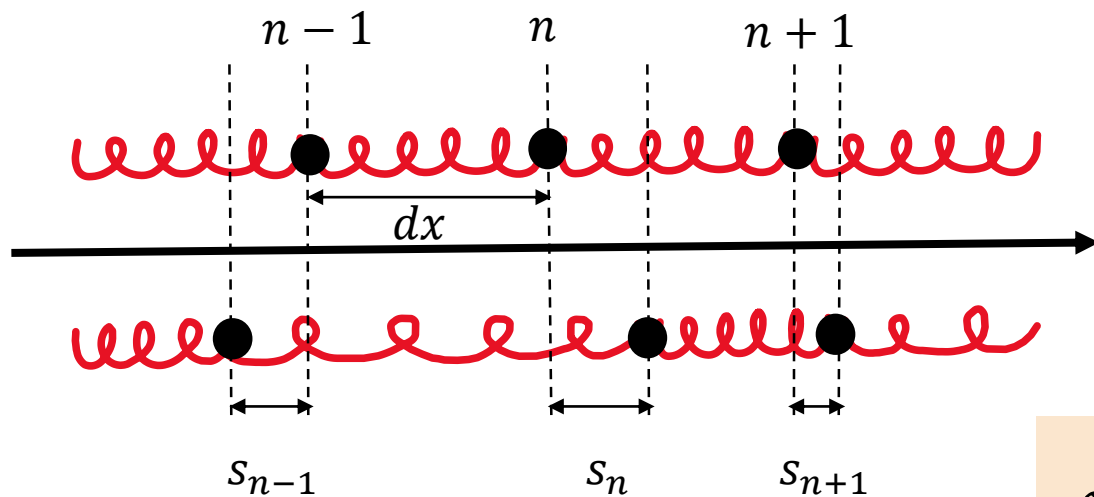
\tilde{A} - zespolona amplituda fali

$$\tilde{A} = A e^{i(\varphi - \frac{\pi}{2})}$$

Zaletą takiego zapisu jest łatwość w różniczkowaniu równania, aby jednak otrzymać poprawny wynik należy po wykonaniu operacji matematycznych odrzucić część urojoną - korzystając ze wzoru Eulera:

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$$

Równanie falowe



$$F_{n,n+1} = k[s_{n+1}(t) - s_n(t)]$$

$$F_{n,n-1} = k[s_{n-1}(t) - s_n(t)]$$

$$m \frac{d^2 s_n(t)}{dt^2} = k[s_{n+1}(t) + s_{n-1}(t) - 2s_n(t)]$$

$$m \frac{d^2 s_n(t)}{dt^2} = F_{n,n+1} + F_{n,n-1}$$

$$s_n(t) = s(x, t)$$
$$s_{n\pm 1}(t) = s(x \pm dx, t)$$

Równanie falowe

$$s(x \pm dx, t) = s(x, t) \pm \frac{\partial s(x, t)}{\partial x} dx + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} (dx)^2 + \dots$$

$$m \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} = k \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} (dx)^2 \qquad \frac{\overset{\rho}{\tilde{m}}}{dx} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} = \overbrace{k dx}^F \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{F}{\rho} = v^2$$

$$\frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 s(x, t)}{\partial t^2} = 0$$

Natężenie fali

Energia średnia \bar{E} zawarta w objętości V ośrodka sprężystego, w którym rozchodzi się fala o amplitudzie A i częstotliwości ω :

$$\bar{E} = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2$$

Natężenie fali I to energia średnia, którą przenosi fala przez jednostkową powierzchnię ΔS w jednostce czasu Δt :

$$I = \frac{1}{\Delta S} \frac{\bar{E}}{\Delta t}$$

moc fali

Średnia gęstość energii fali \bar{e} :

$$\bar{e} = \frac{\bar{E}}{V} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 A^2 \quad (m = \rho V)$$

W czasie Δt ($\Delta t \gg T$) przez powierzchnię ΔS przejdzie energia

$$\Delta E = \bar{e} \Delta V$$

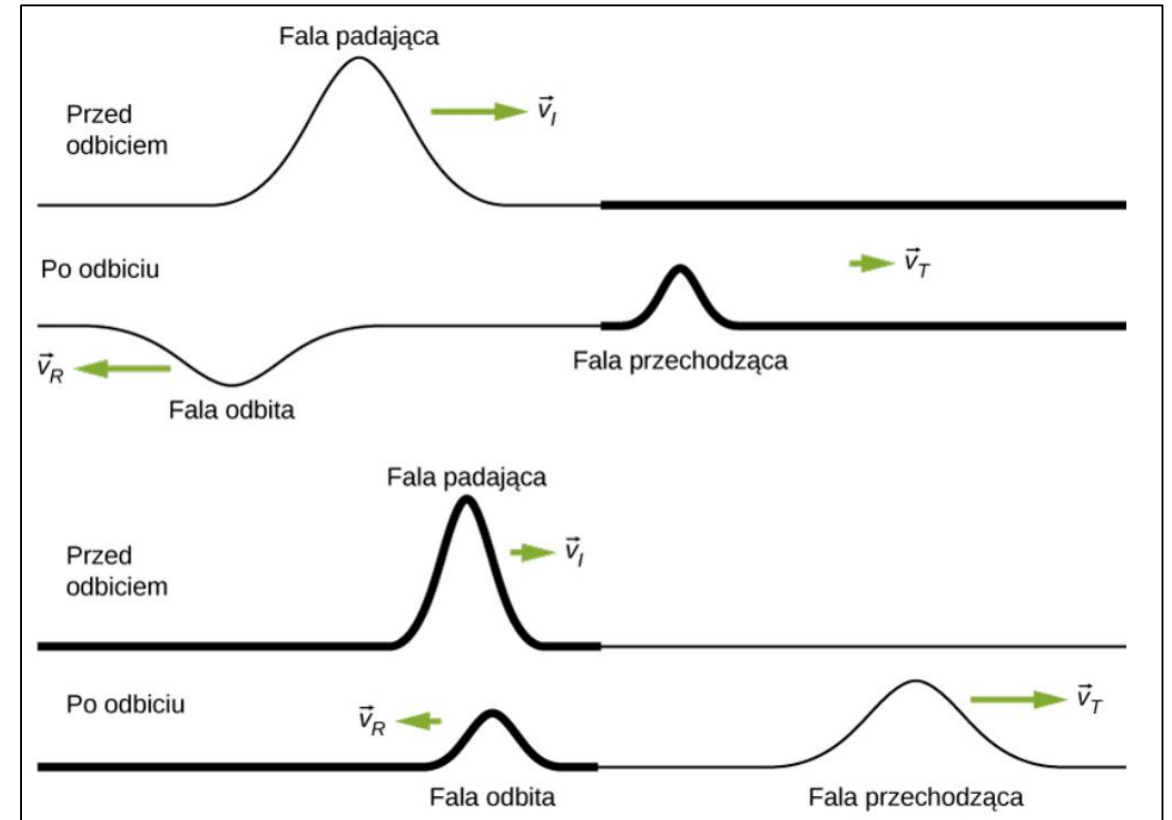
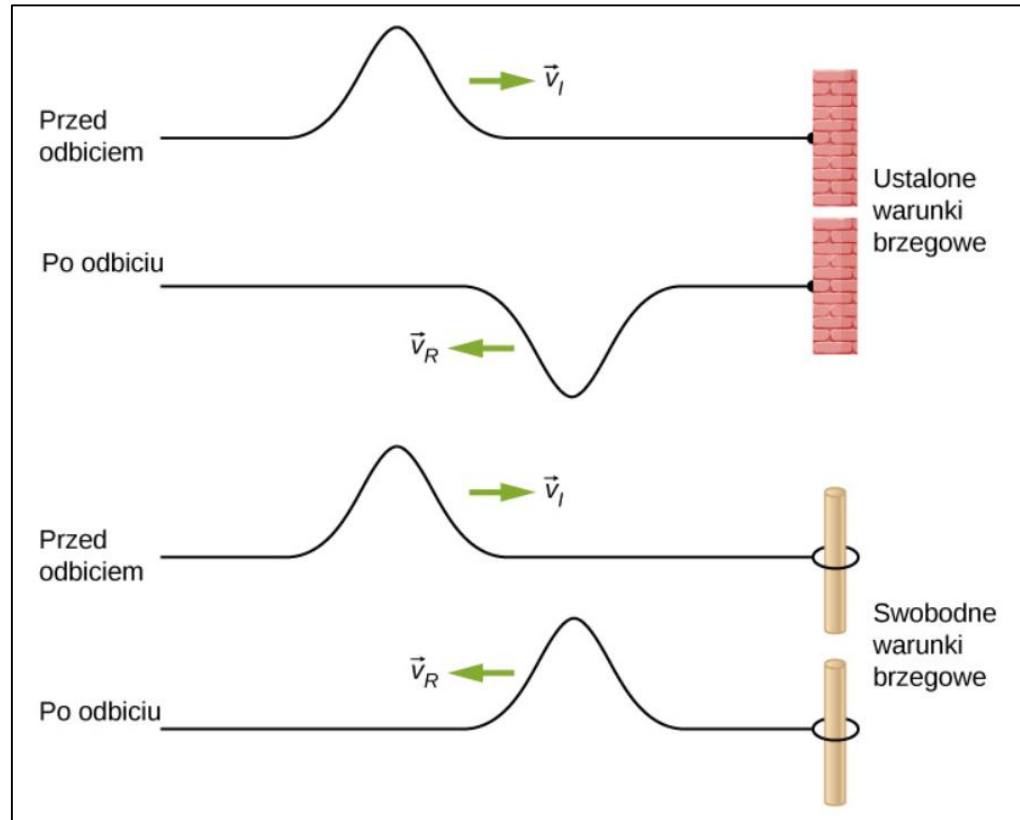
zawarta w objętości

$$\Delta V = \Delta S v \Delta t$$

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} = \bar{e} v$$

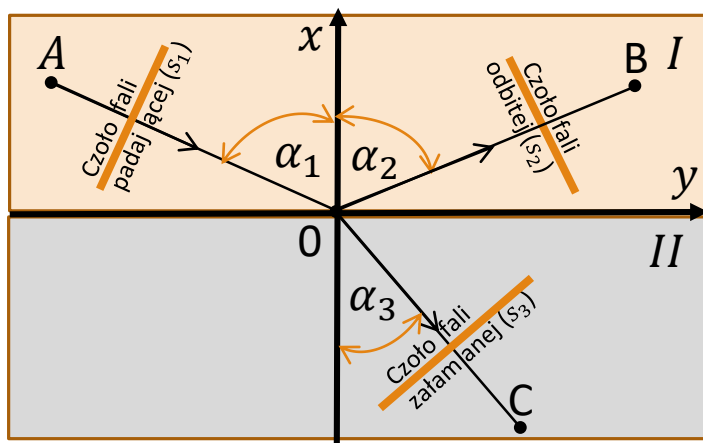
$$I = \frac{\Delta E}{\Delta S \Delta t} = \bar{e} v = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2$$

Faza fali mechanicznej przy odbiciu



Prawo odbicia i załamania fal

Fala płaska harmoniczna pada na granicę dwóch ośrodków (płynnych w przypadku fal sprężystych!)



Indeks dolny 1 stosuje się dla fali padającej, indeks dolny 2 stosuje się dla fali odbitej, indeks dolny 3 stosuje się dla fali załamanej.

v_1 (v_2) - prędkość propagacji fali w ośrodku I (II)

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega$$

Fala pada w płaszczyźnie xy :

$$\vec{k}_i = (k_{ix}, k_{iy}, k_{iz} = 0) \text{ dla } i \in \{1, 2, 3\}$$

Kierunki rozchodzenia się fali padającej, odbitej i załamanej oraz normalna do powierzchni rozdzielającej ośrodki I i II leżą w jednej płaszczyźnie!

Warunek ciągłości

$$\vec{k}_1 = \left(\frac{\omega}{v_1} \cos\alpha_1, \frac{\omega}{v_1} \sin\alpha_1, 0 \right)$$

$$\vec{k}_2 = \left(\frac{\omega}{v_1} \cos\alpha_2, \frac{\omega}{v_1} \sin\alpha_2, 0 \right)$$

$$\vec{k}_3 = \left(\frac{\omega}{v_2} \cos\alpha_3, \frac{\omega}{v_2} \sin\alpha_3, 0 \right)$$

$$\left. \begin{aligned} s_1 &= A_1 \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{v_1} (-x \cos\alpha_1 + y \sin\alpha_1) \right] \\ s_2 &= \pm A_2 \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{v_1} (x \cos\alpha_2 + y \sin\alpha_2) \right] \\ s_3 &= A_3 \cos \left[\omega t - \frac{\omega}{v_2} (-x \cos\alpha_3 + y \sin\alpha_3) \right] \end{aligned} \right\}$$

Warunek ciągłości czyli równości wychyleń w dowolnym punkcie rozdziału obydwu ośrodków: **dowolne wychylenie cząstki ośrodka w kierunku prostopadłym do granicy rozdziału musi być w ośrodkach I i II takie same:**

$$s_1(x=0) + s_2(x=0) = s_3(x=0)$$

$$\begin{aligned} A_1 \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{v_1} y \sin\alpha_1 \right) \pm A_2 \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{v_1} y \sin\alpha_2 \right) \\ = A_3 \cos \left(\omega t - \frac{\omega}{v_2} y \sin\alpha_3 \right) \end{aligned}$$

Słuszne dla dowolnego punktu y i dowolnej chwili czasu t !



Równość argumentów!

Prawo odbicia i załamania fal

$$k_{1y} = |\vec{k}_1| \sin \alpha_1 = k_{2y} = |\vec{k}_2| \sin \alpha_2$$

$$|\vec{k}_1| = |\vec{k}_2| = \frac{\omega}{v_1}$$

$$\frac{\omega}{v_1} \sin \alpha_1 = \frac{\omega}{v_1} \sin \alpha_2$$

Kąt padania i kąt odbicia są kątami ostrymi.

$$\alpha_1 = \alpha_2 \equiv \alpha$$

Prawo odbicia: kąt padania fali jest równy kątowi odbicia fali.

$$k_{1y} = |\vec{k}_1| \sin \alpha_1 = k_{3y} = |\vec{k}_3| \sin \alpha_3$$
$$|\vec{k}_3| = \frac{\omega}{v_2}$$

$$\frac{\omega}{v_1} \sin \alpha_1 = \frac{\omega}{v_2} \sin \alpha_3$$

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_3} = n$$

n – współczynnik załamania

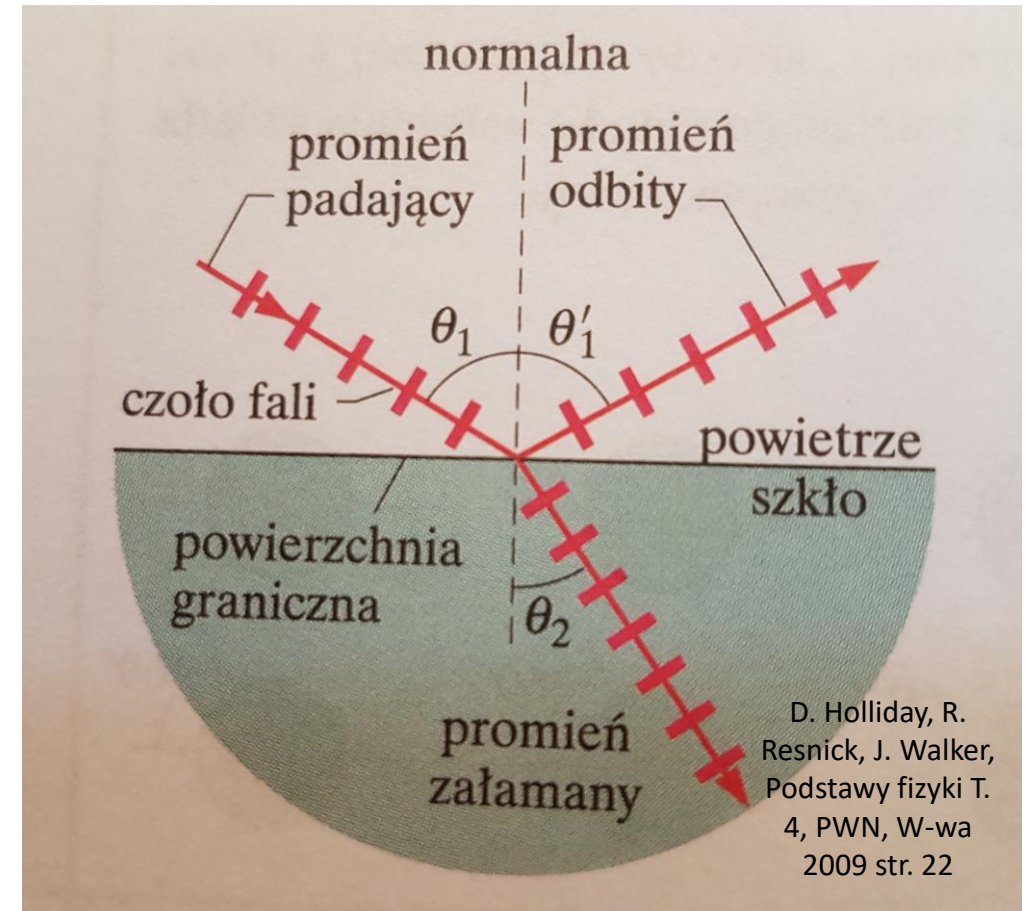
Prawo załamania: stosunek sinusów kątów padania i załamania jest równy stosunkowi prędkości rozchodzenia się fali sprężystej w ośrodku I i II .

Prawo odbicia i załamania światła - optyka geometryczna

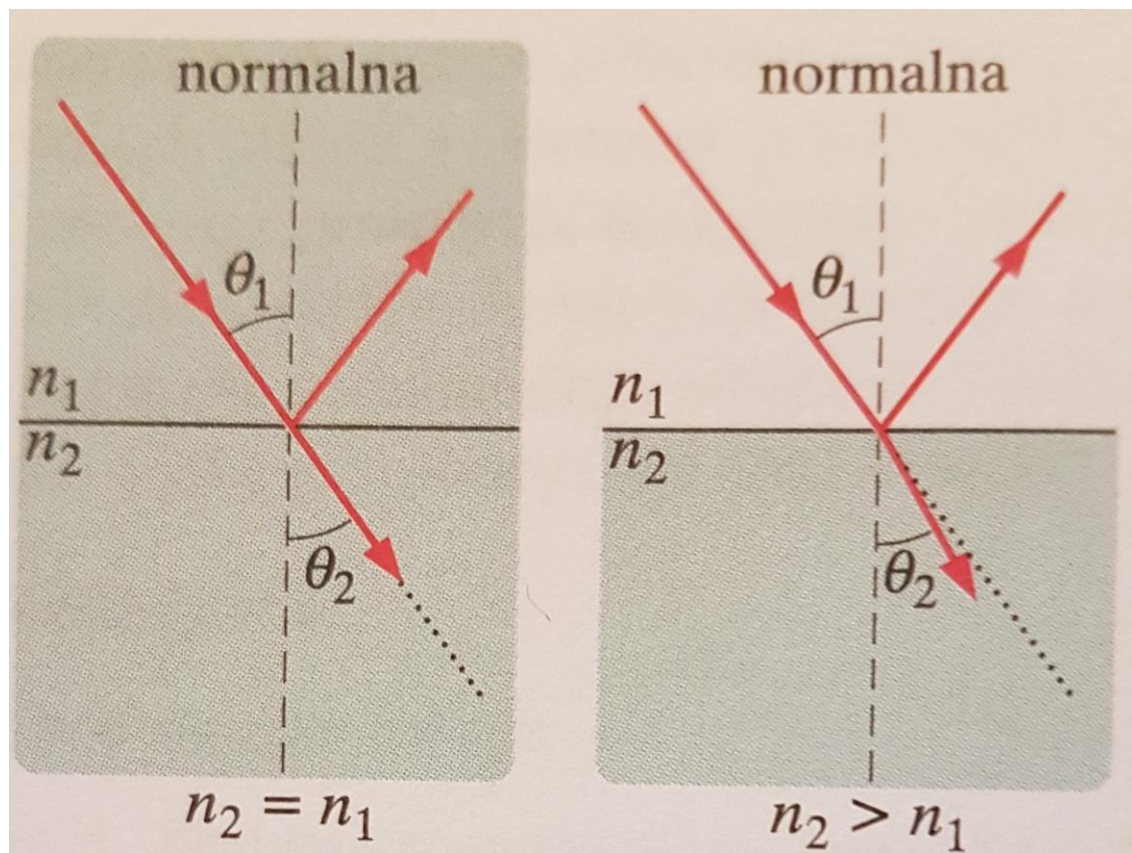
Opisywanie światła w ramach przybliżenia zakładającego, że rozchodzi się ono po linii prostej to podstawowe założenie **optyki geometrycznej**.

Prosta prostopadła do powierzchni granicznej ośrodków w punkcie odbicia i załamania to **normalna**.

Płaszczyzna, która zawiera promień padający i normalną padania nazywa się **płaszczyzną padania**.



Prawo odbicia i załamania



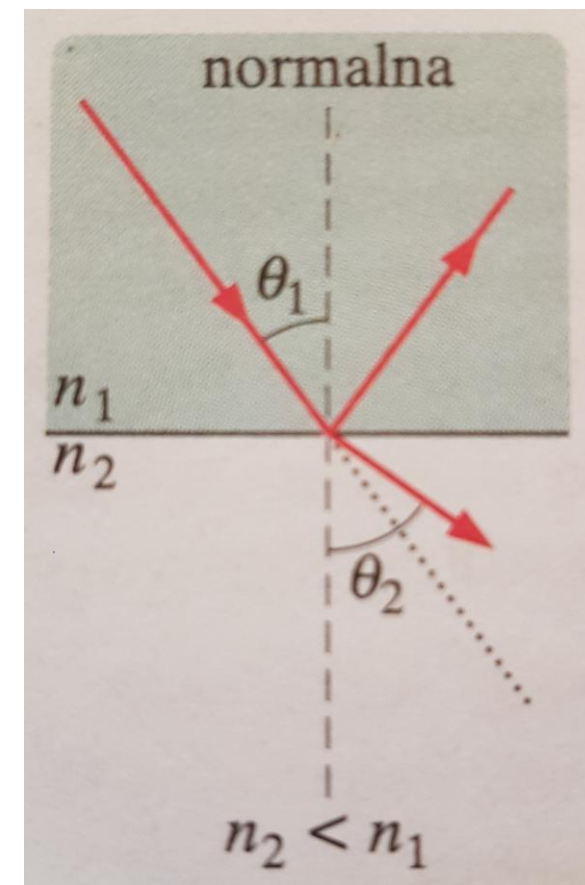
Bezwzględny
współczynnik załamania

$$n = \frac{c}{v}$$

$$\theta'_1 = \theta_1$$

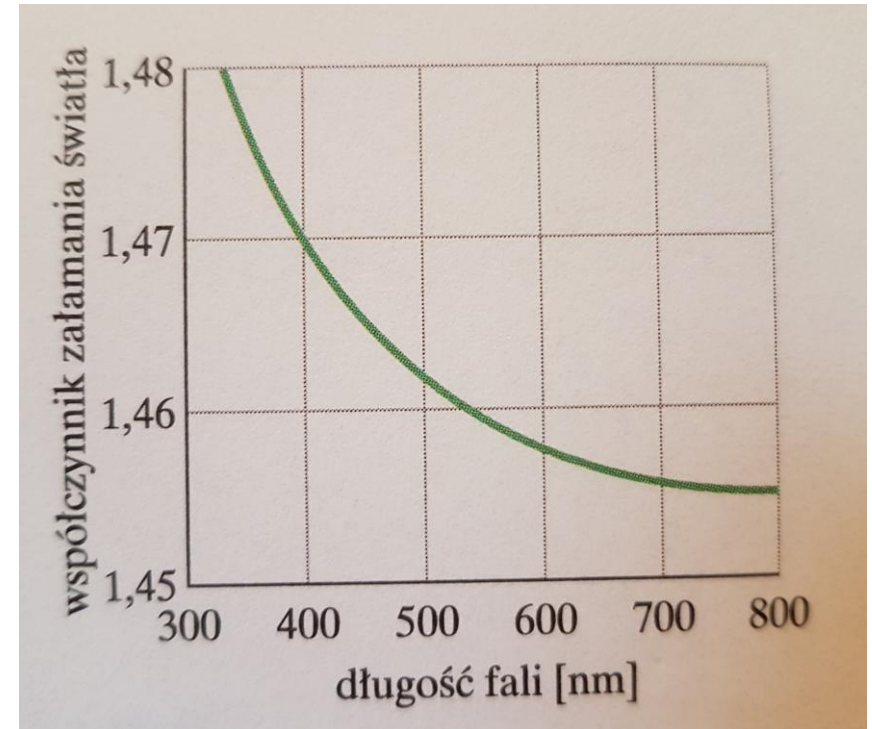
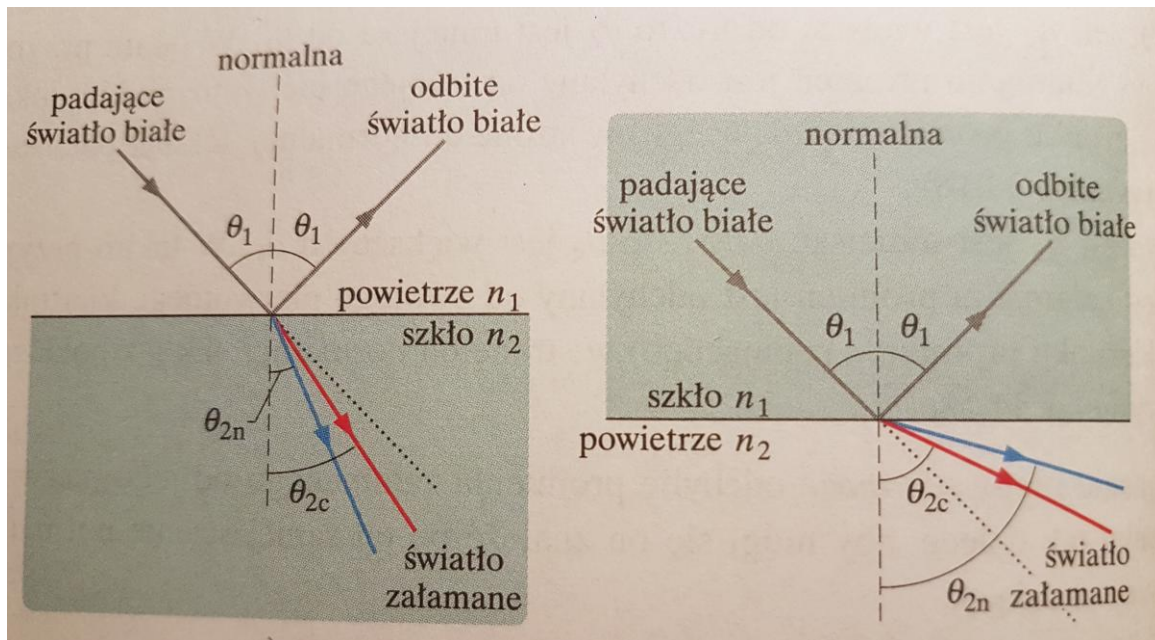
$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1$$

n_1, n_2 - współczynniki
załamania światła



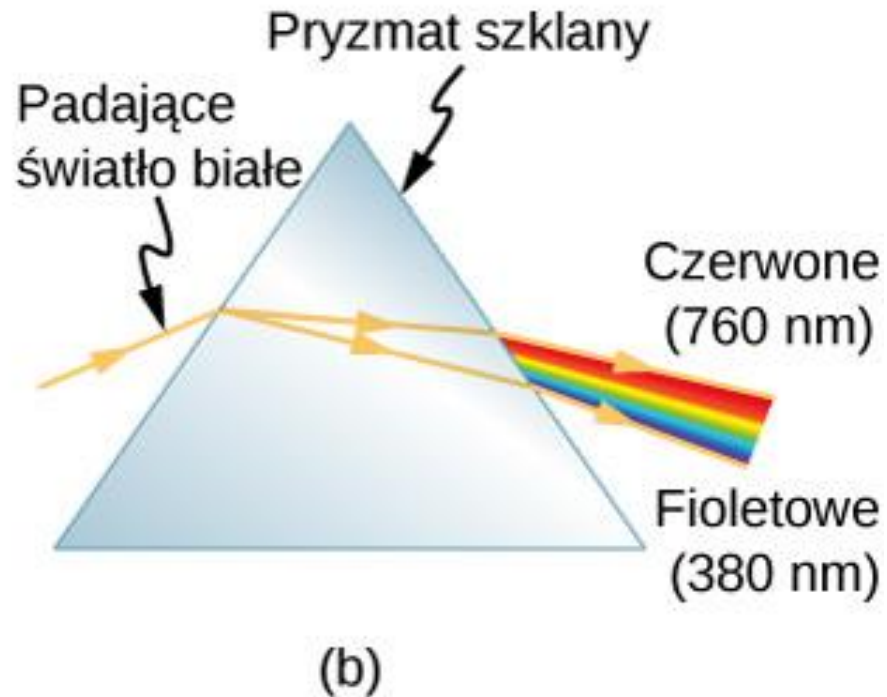
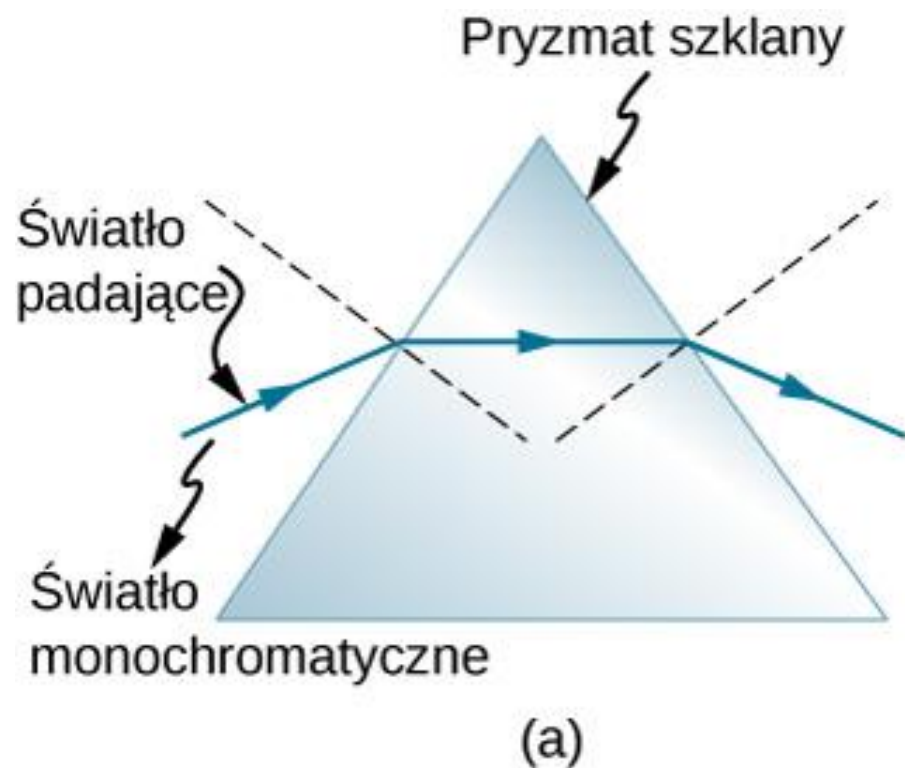
Rozszczepienie fal świetlnych

Współczynnik załamania zależy od długości fali światła (w każdym ośrodku z wyjątkiem próżni). Zazwyczaj współczynnik załamania światła w danym ośrodku jest większy dla fal krótszych.

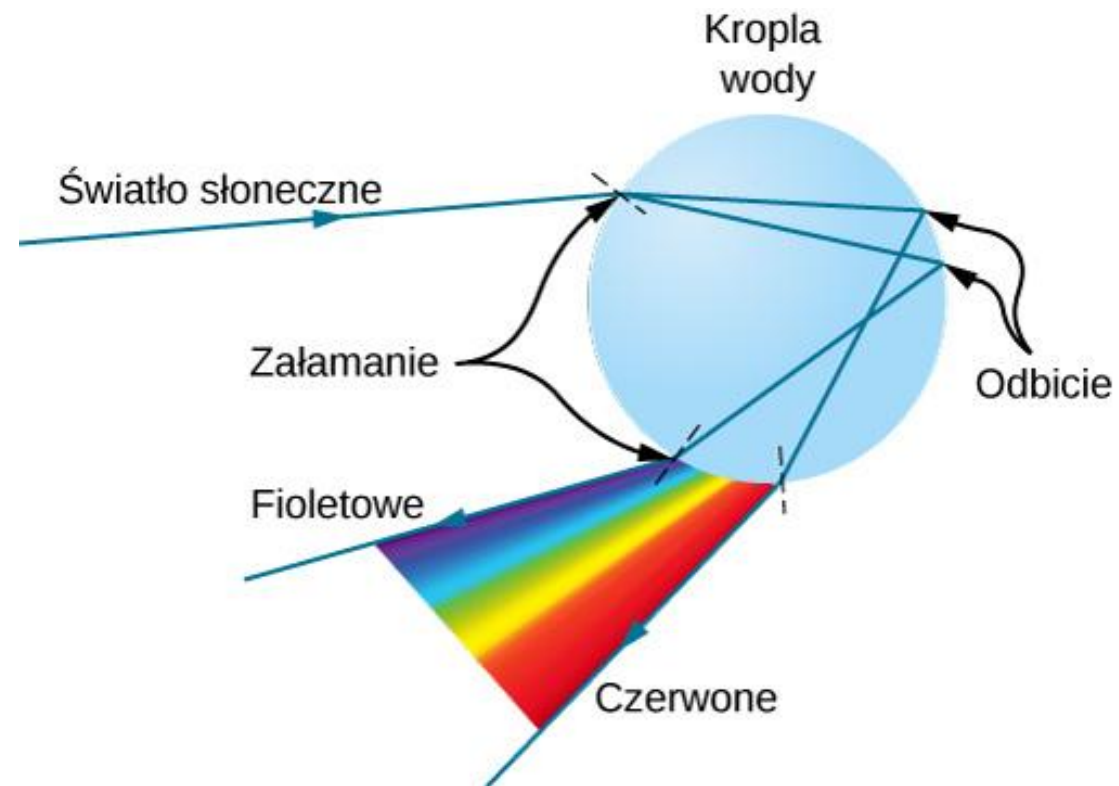


D. Holliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki T. 4, PWN, W-wa 2009 str. 23, 24

Rozszczepienie fal świetlnych



Rozszczepienie fal świetlnych



Całkowite wewnętrzne odbicie

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_3}$$



$$v_2 < v_1 \longrightarrow \alpha_3 < \alpha_1$$

Gdy $v_2 > v_1$ i $\alpha_3 = \frac{\pi}{2}$ to α_1 nazywa się **kątem granicznym** α_{gr}

Dla $\alpha_1 > \alpha_{gr}$

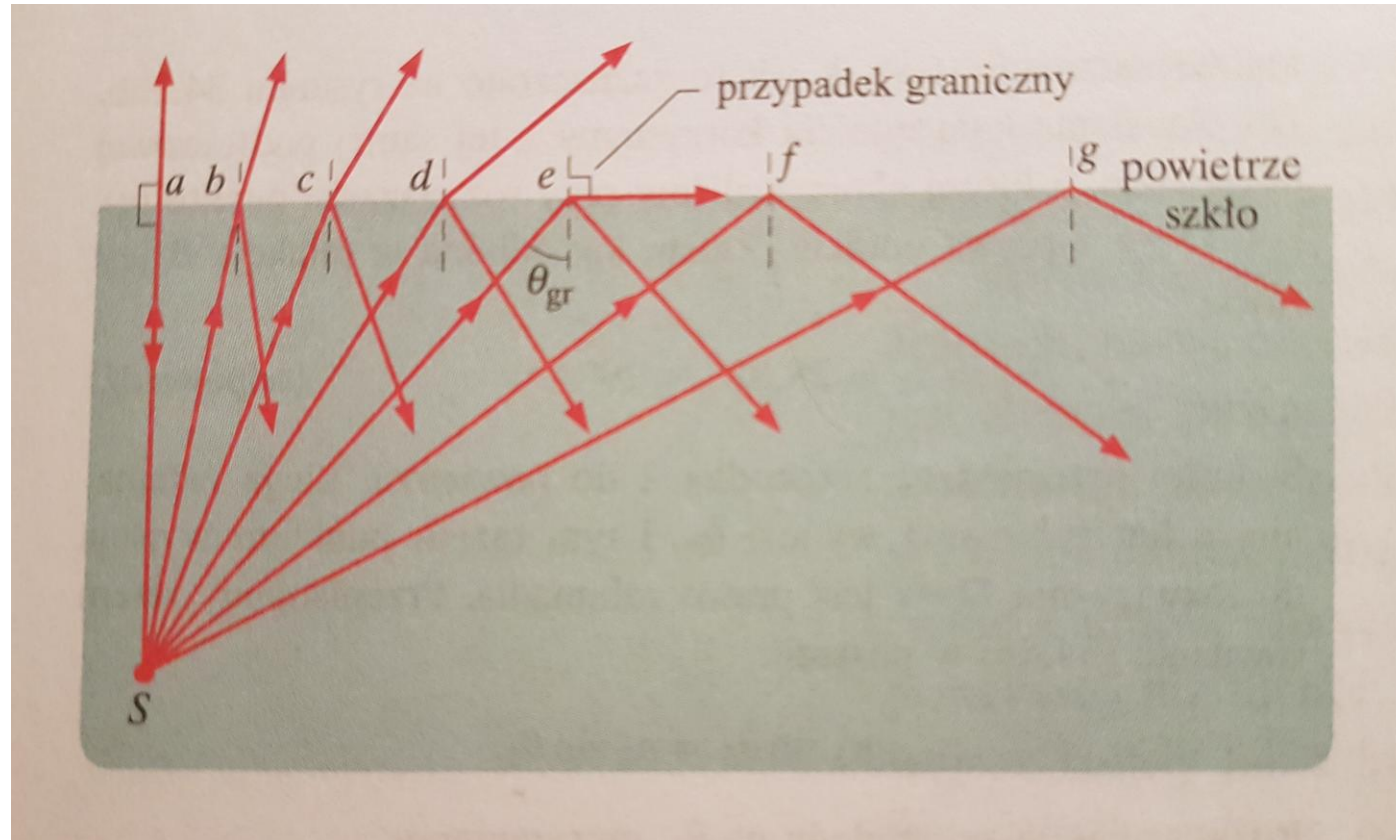
NIE MA FALI ZAŁAMANEJ!

WYSTĘPUJE WÓWCZAS:

CAŁKOWITE WEWNĘTRZNE ODBICIE

FALA NIE ZAŁAMUJE SIĘ!

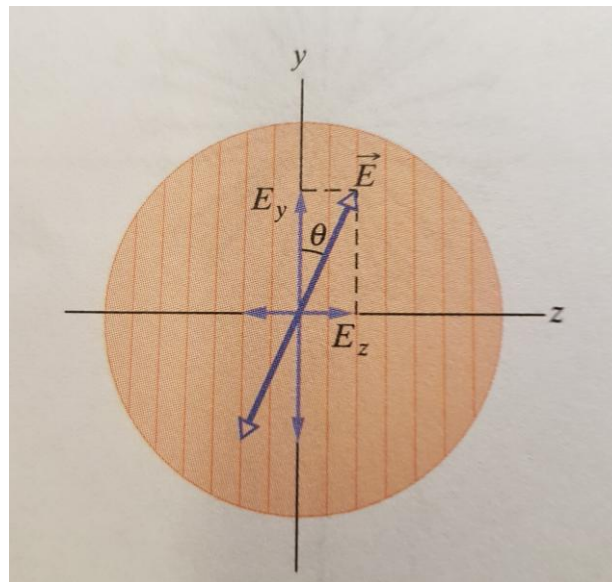
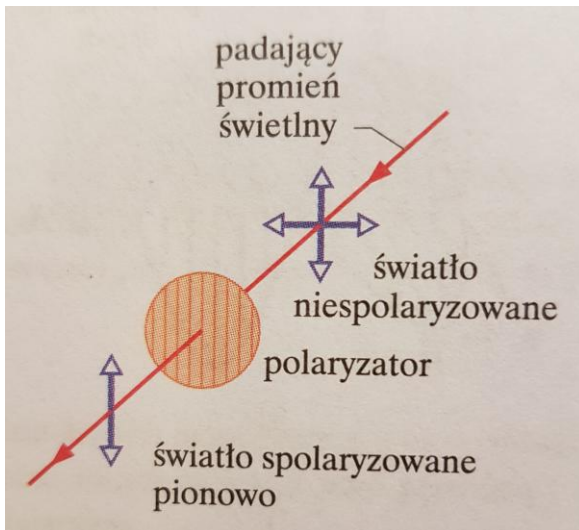
Całkowite wewnętrzne odbicie światła



Polaryzacja światła

Płaszczyzna, w której leżą wektory \vec{E} nazywa się **płaszczyzną polaryzacji**.

W fali niespolaryzowanej wektor \vec{E} jest zawsze prostopadły do kierunku rozchodzenia się fali, ale jego kierunek zmienia się przypadkowo. Kiedy światło przechodzi przez polaryzator jedynie składowe wektora \vec{E} wzdłuż wybranego kierunku są przepuszczane.

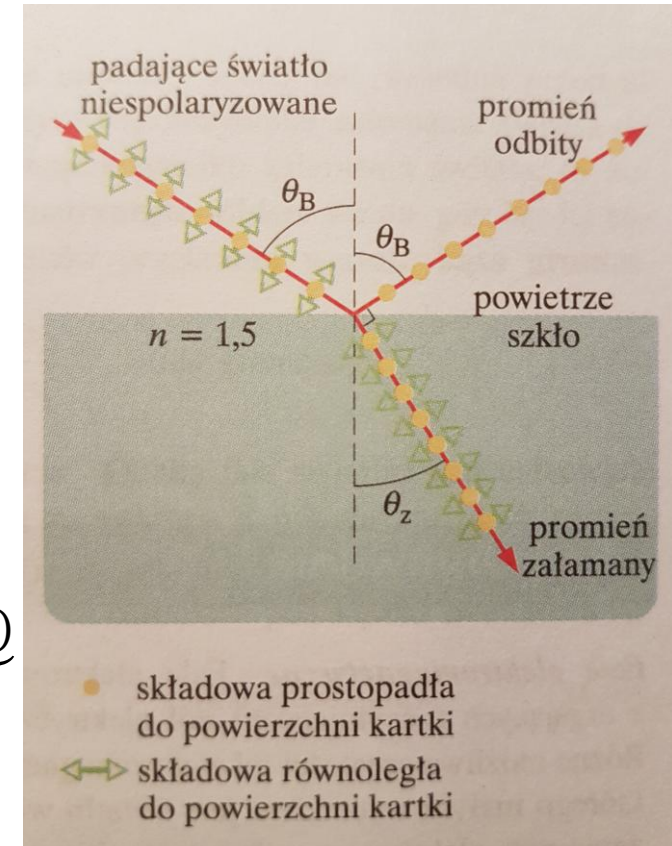


$$\theta_B + \theta_z = 90^\circ$$

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \sin \theta_z$$

$$n_1 \sin \theta_B = n_2 \underbrace{\sin(90^\circ - \theta_B)}_{\cos \theta_B}$$

$$\theta_B = \text{arc tg } \frac{n_2}{n_1}$$



Superpozycja fal

Fale nie oddziałują na siebie, ale rozchodzą się niezależnie.

W obecności dwóch lub kilku fal każdy punkt ośrodka bierze udział w drganiu wywołanym przez każdą falą oddzielnie.

Przemieszczenia wywołane przez każdą falę dodają się wektorowo, w szczególnym przypadku ruchu w jednym kierunku – dodają się algebraicznie.

Zasada superpozycji mówi, że jeżeli do wybranego punktu ośrodka drgającego dociera jednocześnie kilka fal, to punkt ten doznaje wychylenia, będącego sumą wychyleń, wywołanych przez fale składowe.

Zasada superpozycji w ośrodkach sprężystych obowiązuje gdy dopuszczalne jest stosowanie prawa Hooke'a (amplituda drgania wypadkowego jest mała)!

Fale stojące

Fala stojąca powstaje przez nałożenie się dwóch fal s_1 i s_2 (o tych samych częstościach i długościach fali) biegnących w przeciwnie strony:

$$s_{1,2} = A \cos(\omega t \mp kx + \varphi_{1,2})$$

W **fali stojącej** wszystkie punkty drgają jednocześnie, ale z różnymi amplitudami (w **fali biegnącej** wszystkie punkty drgają z tą samą amplitudą lecz z opóźnieniem fazowym).

Obszary punktów drgających z zerową amplitudą nazywają się **węzłami fali**, a obszary punktów drgających z maksymalną amplitudą nazywają się **strzałkami fali**.

$$\varphi_1 = 0, \varphi_2 \equiv \varphi$$

$$s = A \cos(\omega t - kx) + A \cos(\omega t + kx + \varphi)$$

$$s = \underbrace{2A \cos\left(kx + \frac{\varphi}{2}\right)}_{A(x)} \cos\left(\omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

Amplituda fali stojącej zależy od położenia!

Odbicie od ośrodka o większym oporze falowym $\varphi = \pm\pi$

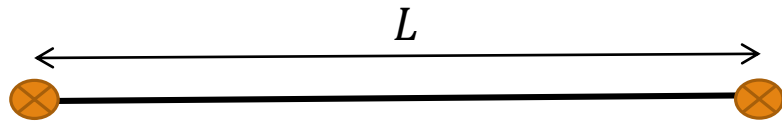
$$s = 2A \sin(kx) \sin(\omega t)$$

$$kx = n\pi - \text{węzły fali stojącej, } n = 0, 1, 2, \dots$$

$$kx = (2n + 1)\frac{\pi}{2} - \text{strzałki fali stojącej, } n = 0, 1, 2, \dots$$

Częstotliwości drgań własnych.

Pręt zamocowany na obu końcach.



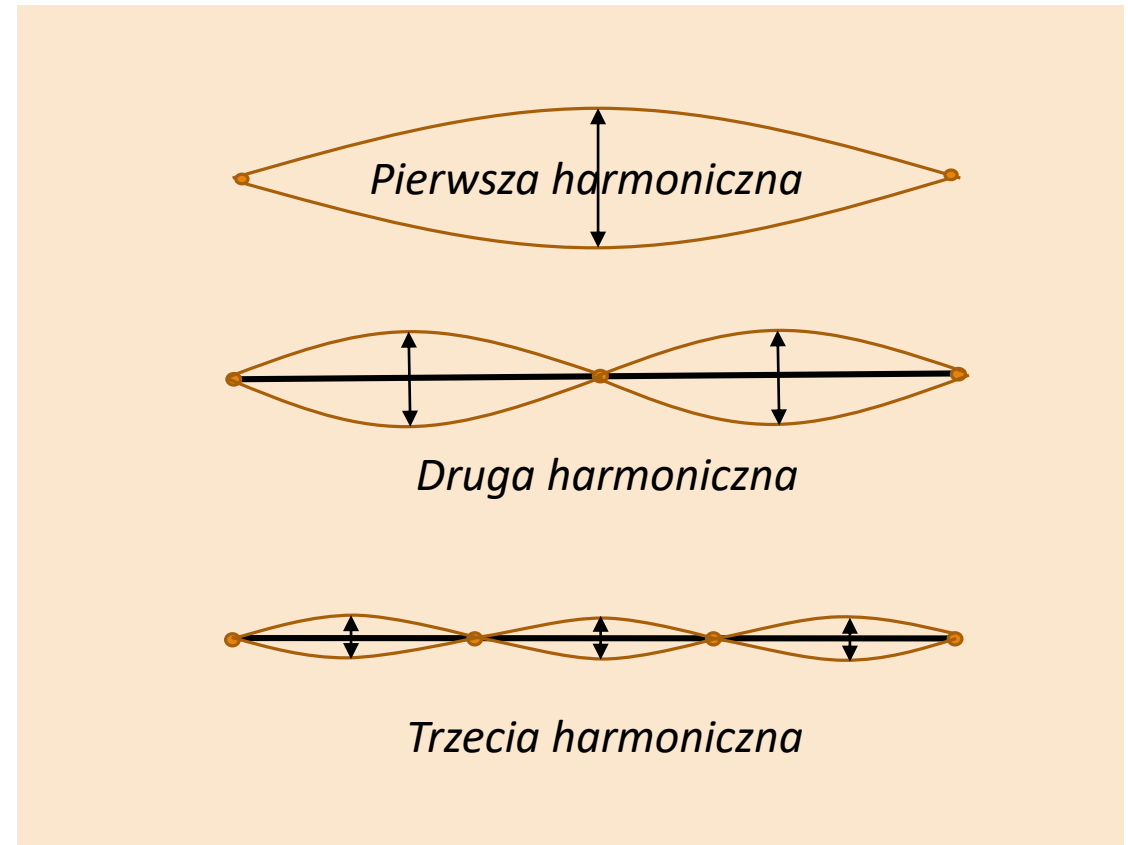
Fala stojąca powstaje tylko przy pewnych określonych częstotliwościach!

Na długości pręta L ułoży się tylko całkowita liczba połówek fali:

$$L = n \frac{\lambda}{2}, \quad n = 1, 2, 3 \dots$$

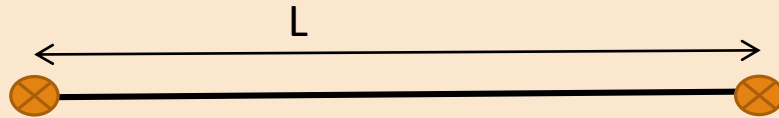
$$\omega = \frac{\pi v}{L} n$$

v – prędkość rozchodzenia się fali sinusoidalnej



Fala stojąca

$$s(x, t) = A \sin(\omega t - kx) + B \sin(\omega t + kx)$$



$$s(0, t) = s(L, t) = 0$$

$$A \sin \omega t + B \sin(\omega t) = 0 \quad \text{dla } \omega \neq 0 \quad A = -B$$

$$A \sin(\omega t - kL) + B \sin(\omega t + kL) = 0 \quad \rightarrow \quad A \sin(\omega t - kL) - A \sin(\omega t + kL) = 0$$

$$2A \cos(\omega t) \sin(kL) = 0 \quad \text{dla } \omega \neq 0 \text{ i } A \neq 0 \quad kL = n\pi, n = \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$k = \frac{\pi}{L} n$$

$$s(x, t) = 2A \sin\left(\frac{\pi}{L} nx\right) \cos(\omega t)$$

Natężenie fali stojącej

Natężenie fali biegnącej jest **takie samo** w każdym punkcie ośrodka:

$$I_0 = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 A^2$$

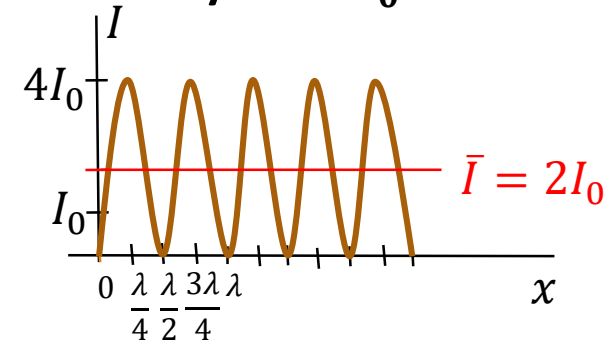
Natężenie fali stojącej:

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 (2A \sin(kx))^2 = 2 \rho v \omega^2 A^2 \sin^2 kx$$

$$I = 4I_0 \sin^2 kx$$

W węzłach fali stojącej natężenie fali wynosi 0!

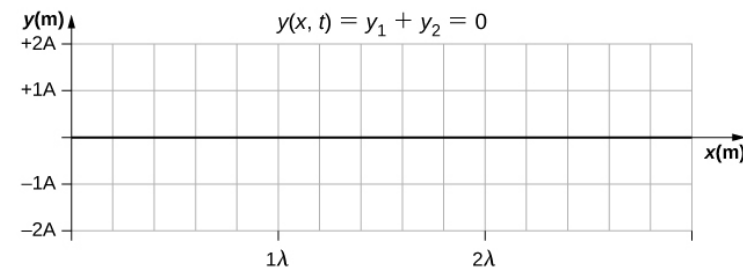
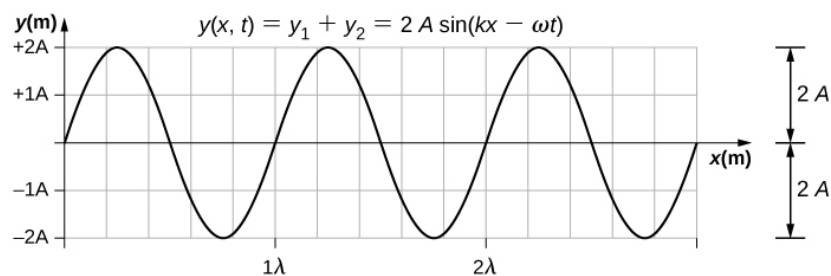
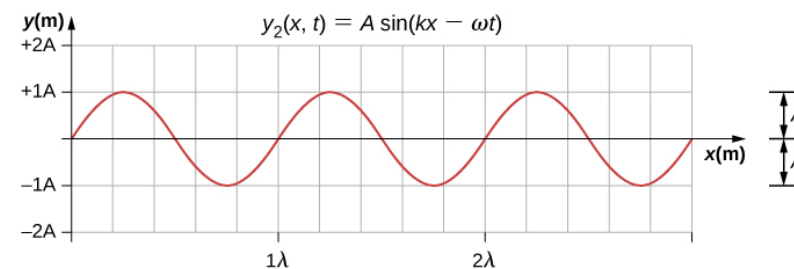
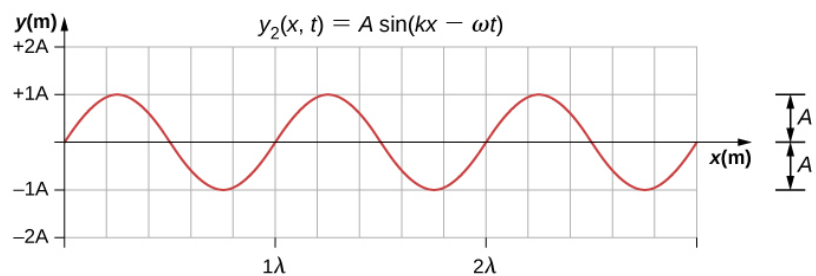
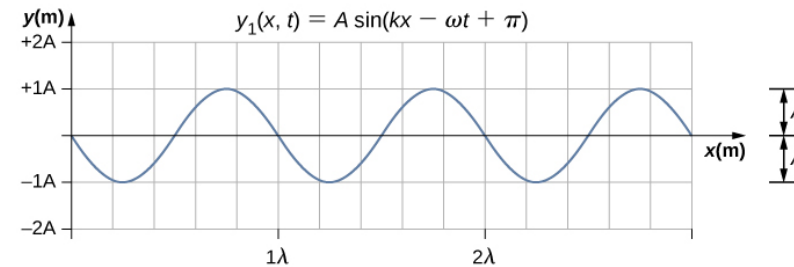
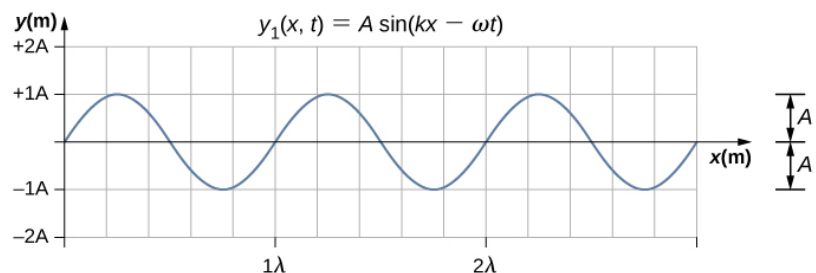
Dla strzałek fali stojącej natężenie jest maksymalne i wynosi $4I_0$!



Energia drgań w każdym punkcie fali stojącej nie jest równa sumie energii fal składowych!

Średnia energia fali stojącej jest równa sumie energii fal składowych – zasada zachowania energii.

Wzmacnianie i wygaszanie się dwóch fal



Interferencja fal

Interferencja to zjawisko nakładania się ciągów falowych.

Fale składowe muszą mieć tę samą częstotliwość!

(a jak rozchodzą się w tym samym ośrodku to z równości częstotliwości wynika równość długości fal)

Interferencja fal rozchodzących się w tym samym kierunku dodatnich wartości osi X (np. fale biegnące w linie):

$$y_1(x, t) = y_m \cos(\omega t - kx)$$

$$y_2(x, t) = y_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = \\ = y_m \cos(\omega t - kx) + y_m \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$y(x, t) = 2y_m \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\omega t - kx + \frac{\varphi}{2}\right)$$

Interferencja konstruktywna:

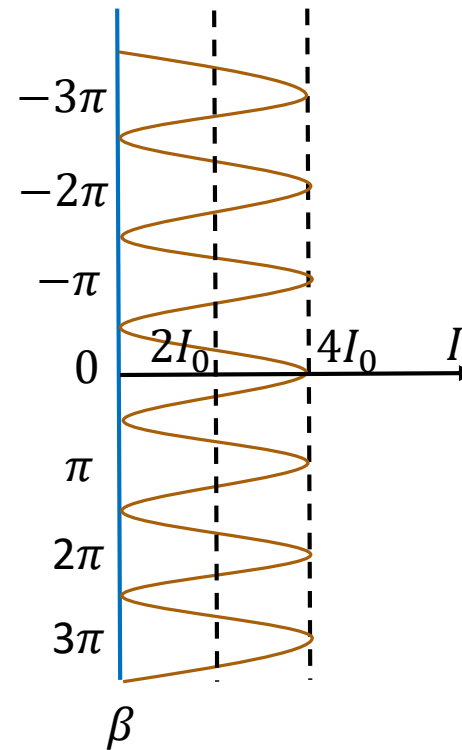
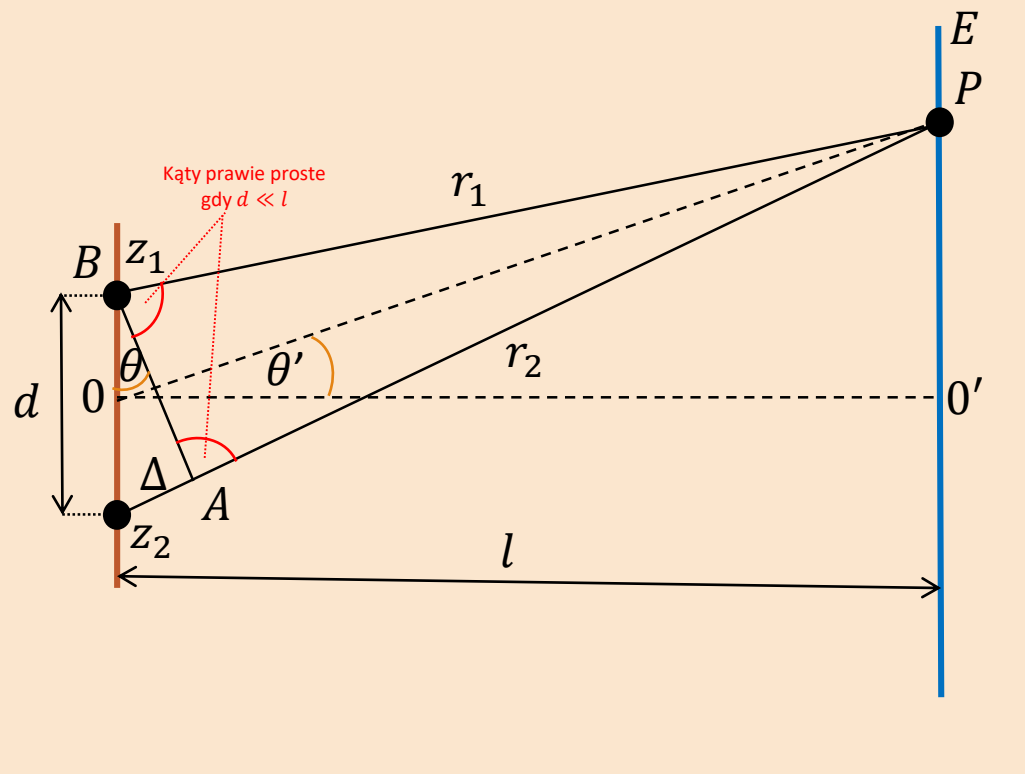
$$\varphi = 0$$

Interferencja destruktywna:

$$\varphi = \pi$$

Interferencja w polu w dużej odległości od dwóch źródeł punktowych

Interferencja dwóch fal kulistych



„Przybliżenie pola dalekiego źródła”

Dla $d \ll l$:

$$|AP| = |BP|$$

$$|AP| \parallel |BP|$$

$$\theta \approx \theta'$$

Różnica dróg Δ dwóch fal emitowanych przez źródła z_1 i z_2 :

$$\Delta = r_2 - r_1 = d \sin \alpha$$

Interferencja w polu w dużej odległości od dwóch źródeł punktowych

$$s_1 = a \cos(\omega t - kr_1 + \varphi_1)$$

$$s_2 = a \cos(\omega t - kr_2 + \varphi_2)$$

$$s = s_1 + s_2 =$$

$$\underbrace{2a \cos \left[k \frac{r_2 - r_1}{2} + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \right]}_{\text{nowa amplituda } B} \cos \left[\omega t - k \frac{r_1 + r_2}{2} + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right]$$

$\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$ – rozważamy fale sinusoidalne

Przyjmujemy $\varphi_1 - \varphi_2 = 0$



$$B = 2a \cos \left(k \frac{r_2 - r_1}{2} \right) = 2a \cos \left(\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \right)$$

$$I_0 = I_1 = I_2 = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 a^2$$

Natężenie fali wypadkowej

$$I = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 B^2 = \overbrace{\frac{1}{2} \rho v \omega^2 a^2}^{I_0} 4 \cos^2 \left(\pi \frac{\overbrace{r_2 - r_1}^{\Delta}}{\lambda} \right)$$

$$I = 4I_0 \cos^2 \beta$$

Interferencja w polu w dużej odległości od dwóch źródeł punktowych

Maksimum interferencyjne:

$$\Delta = d \sin \theta = r_2 - r_1 = \lambda n \quad (n = 0, 1, 2, 3 \dots)$$

$$\cos^2 \left(\underbrace{\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}}_{\beta} \right) = 1$$

$$I_{max} = 4I_0$$

Minimum interferencyjne:

$$\Delta = d \sin \theta = r_2 - r_1 = \lambda \left(n + \frac{1}{2} \right)$$

$$\cos^2 \left(\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda} \right) = 0$$

$$I_{min} = 0$$

Zasada zachowania energii:

$$\bar{I} = 2I_0 = I_1 + I_2$$

Energia rozkłada się jak w fali stojącej – przegrupowanie energii między minimami i maksimami (inaczej niż w fali biegnącej)!

Tak więc powstawanie fali stojącej jest przykładem interferencji!

Interferencja światła

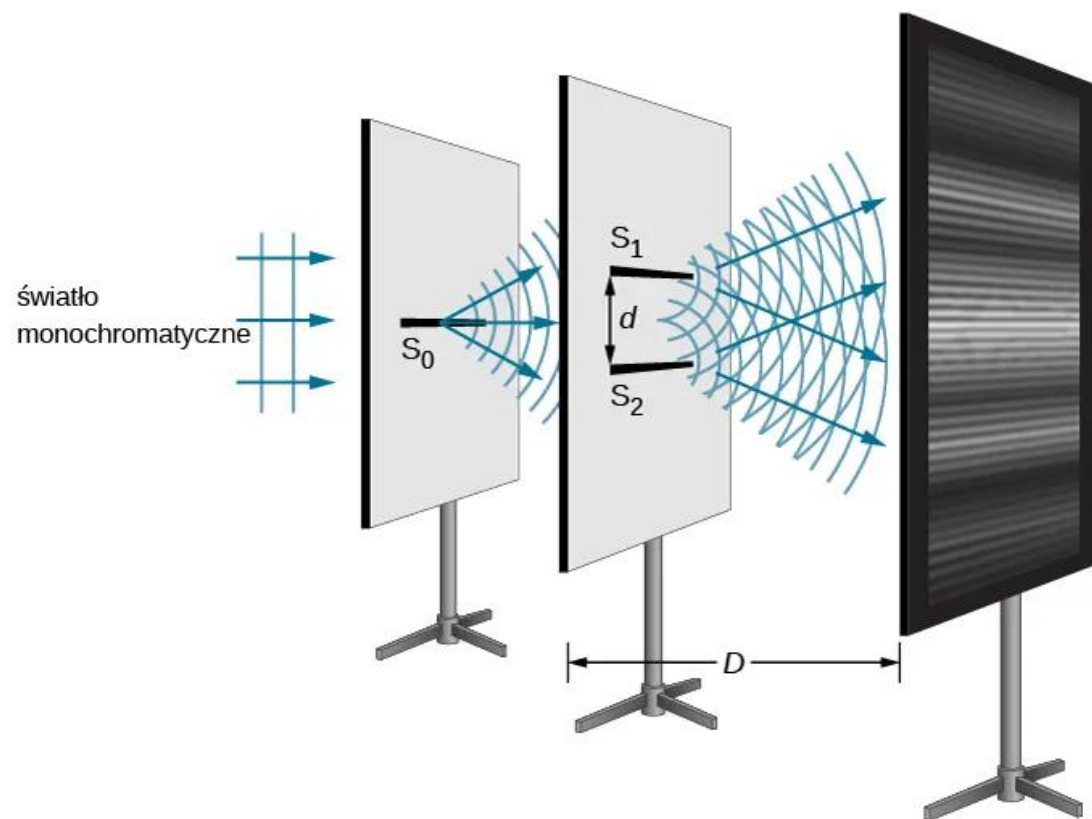
Fala elektromagnetyczna jest prawie sinusoidalną falą z fazą, która zmienia się w sposób przypadkowy w czasie!!!

Warunek równości częstotliwości nie jest wystarczający do powstania interferencji fal świetlnych!

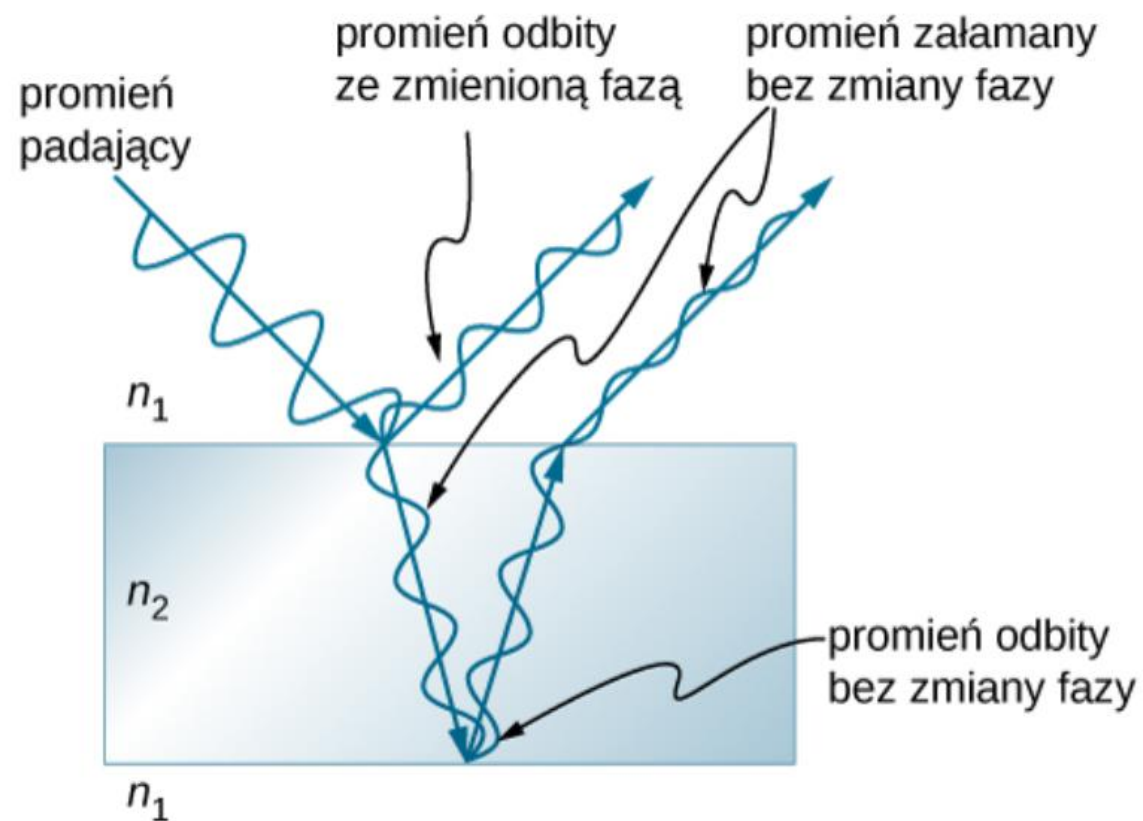
Obraz interferencyjny powstaje, gdy nakładają się fale świetlne **koherentne** (fale o takiej samej częstotliwości, w których różnica faz jest stała).

Tylko fale świetlne KOHERENTNE dają obraz interferencyjny!!!

Doświadczenie interferencyjne Younga (1801 r.)

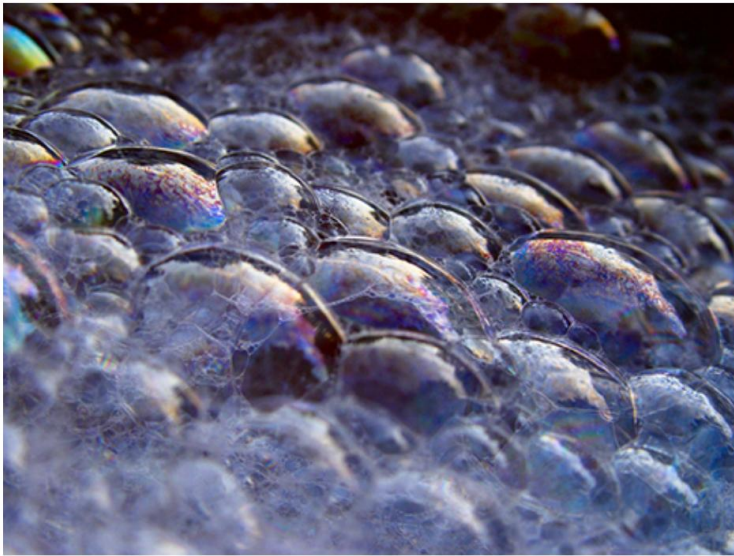


Zmiana fazy fali świetlnej przy odbiciu



Interferencja światła w cienkich warstwach

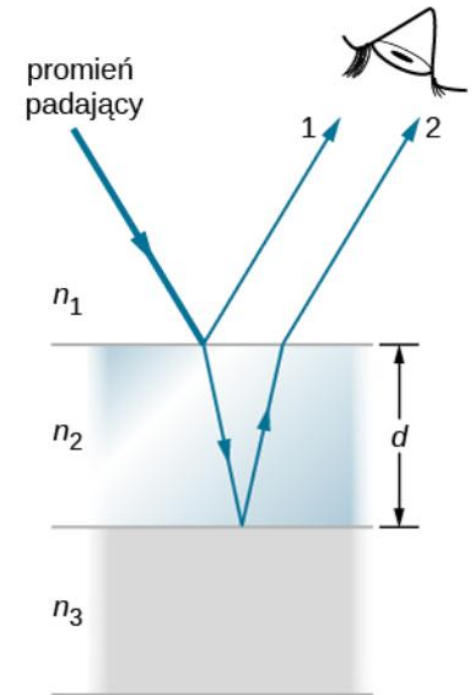
Rozmiary przedmiotów porównywalne z długością padającej fali świetlnej!



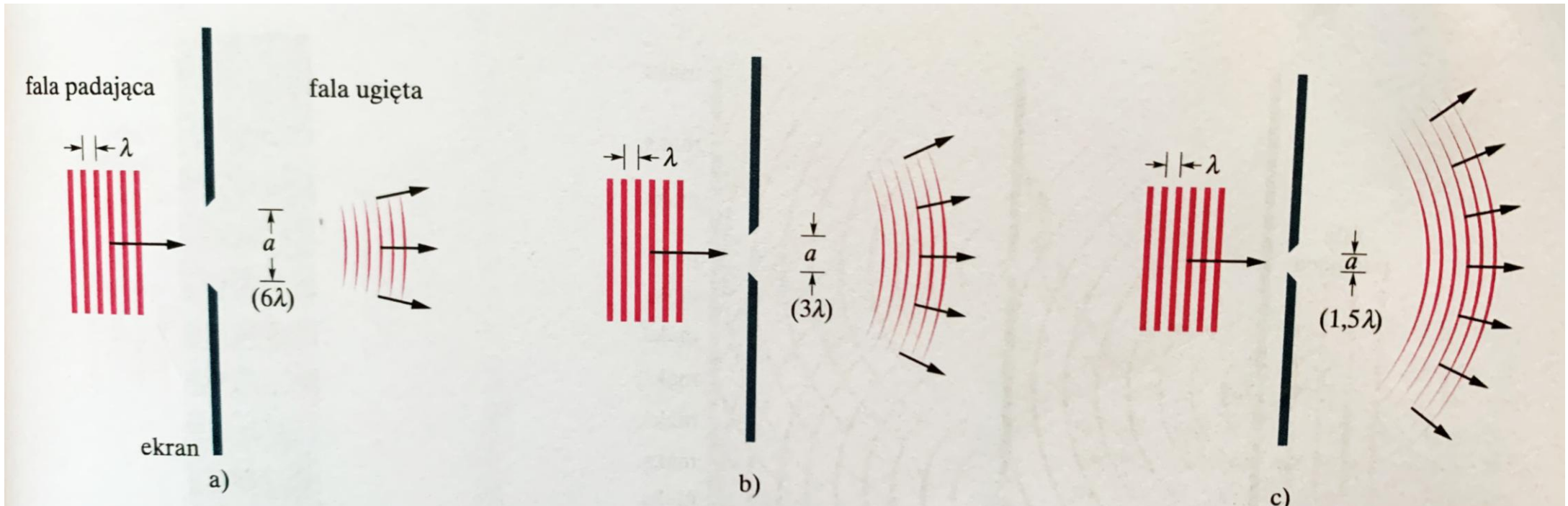
$\varphi_1 = \pi$
różnica drogi optycznej $\frac{\lambda}{2}$

$d \ll \lambda$ – interferencja
destruktywna!

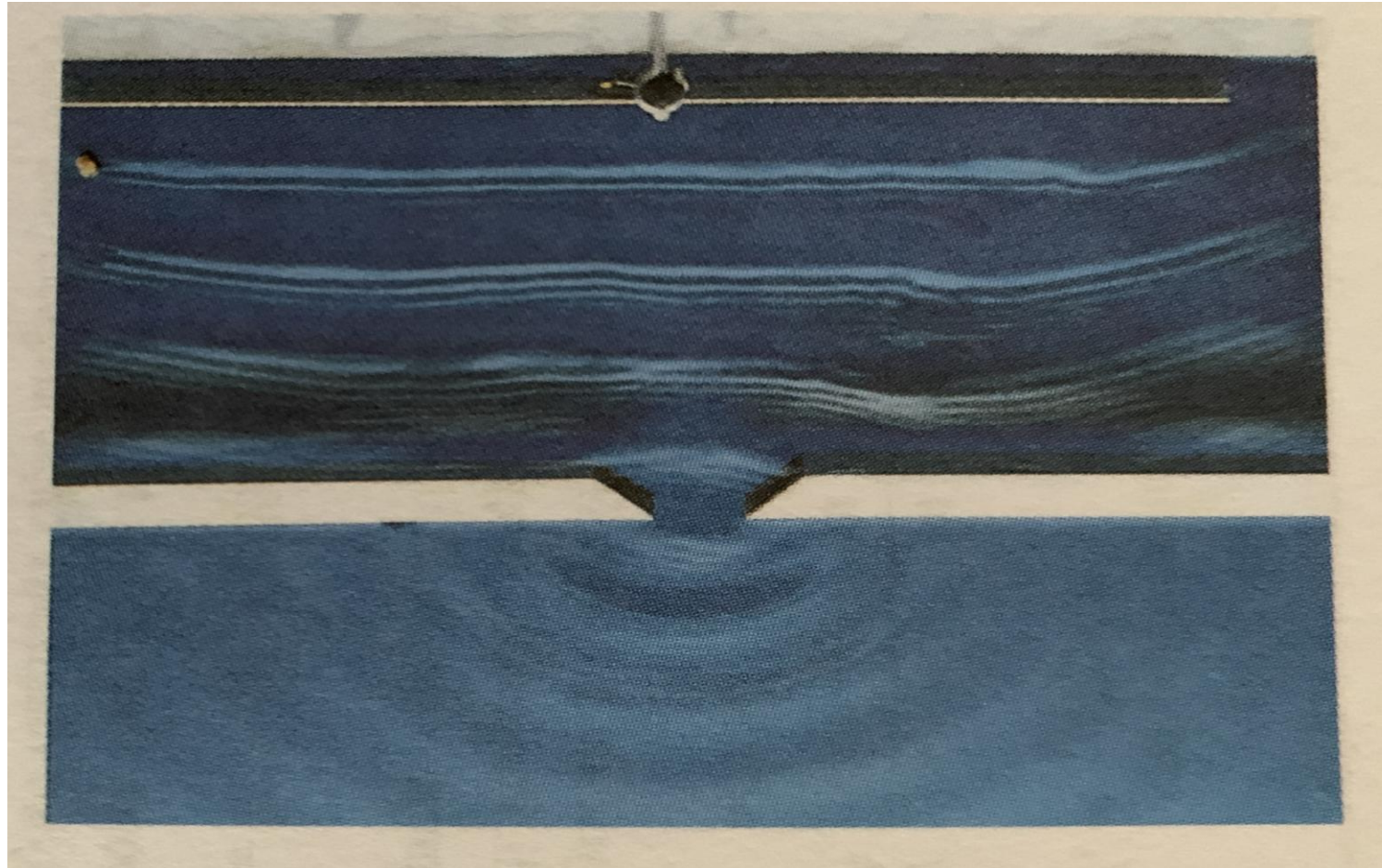
Dla fal padających prostopadle
 $2d = \left(m + \frac{1}{2}\right) \lambda$ – interferencja
konstruktywna
 $2d = m\lambda$ – interferencja destruktywna
 $m \in \mathbb{Z}$, λ – dł. fali w śr. 1



Dyfrakcja

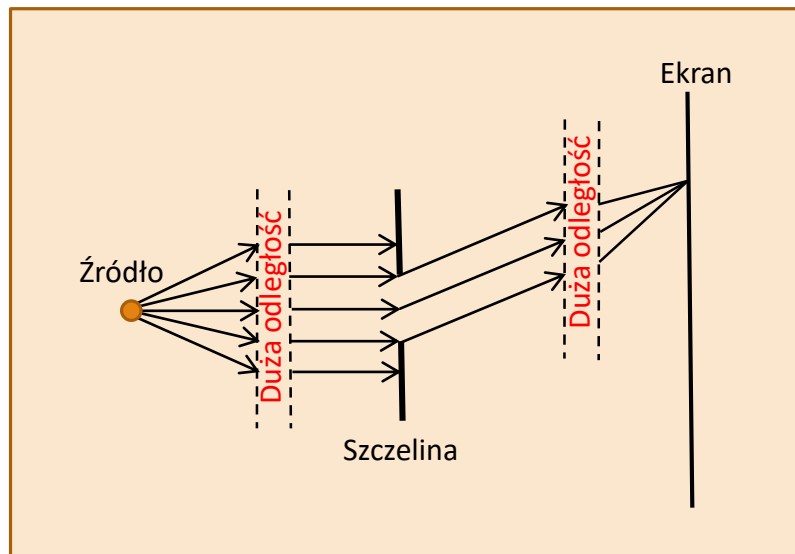


Dyfrakcja fal rozchodzących się po powierzchni wody



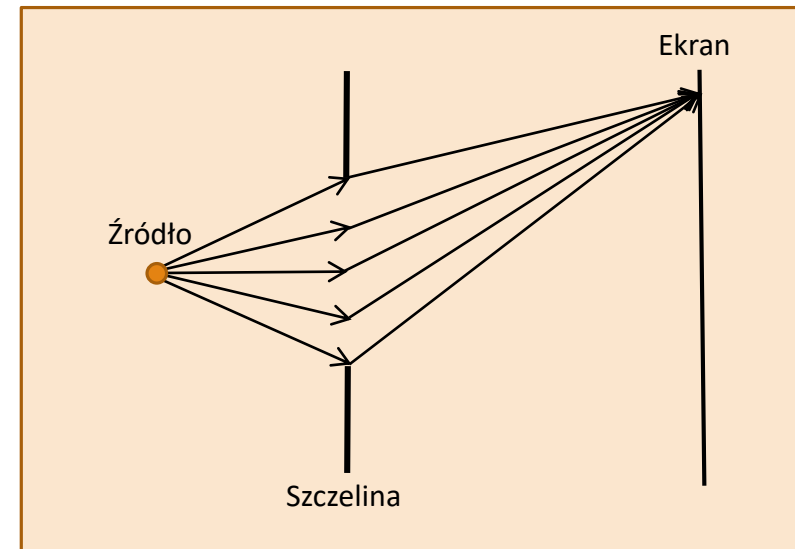
Dyfrakcja Fraunhofera i Fresnela

Dyfrakcja Fraunhofera



Źródło fali i ekran znajdują się w dużej odległości od szczeliny.

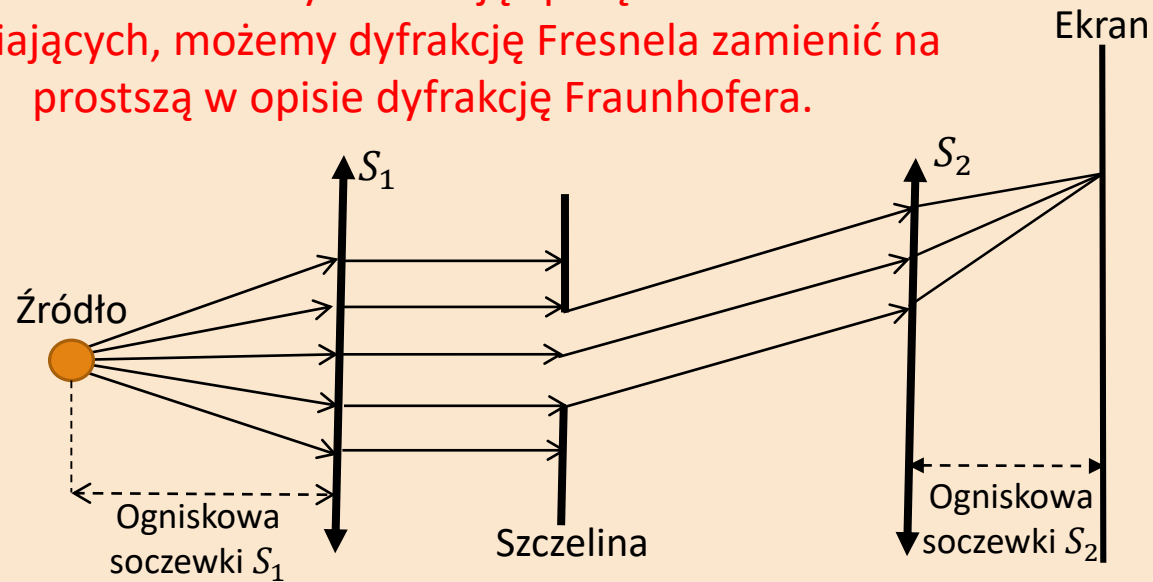
Dyfrakcja Fresnela



Źródło fali i ekran znajdują się blisko szczeliny.

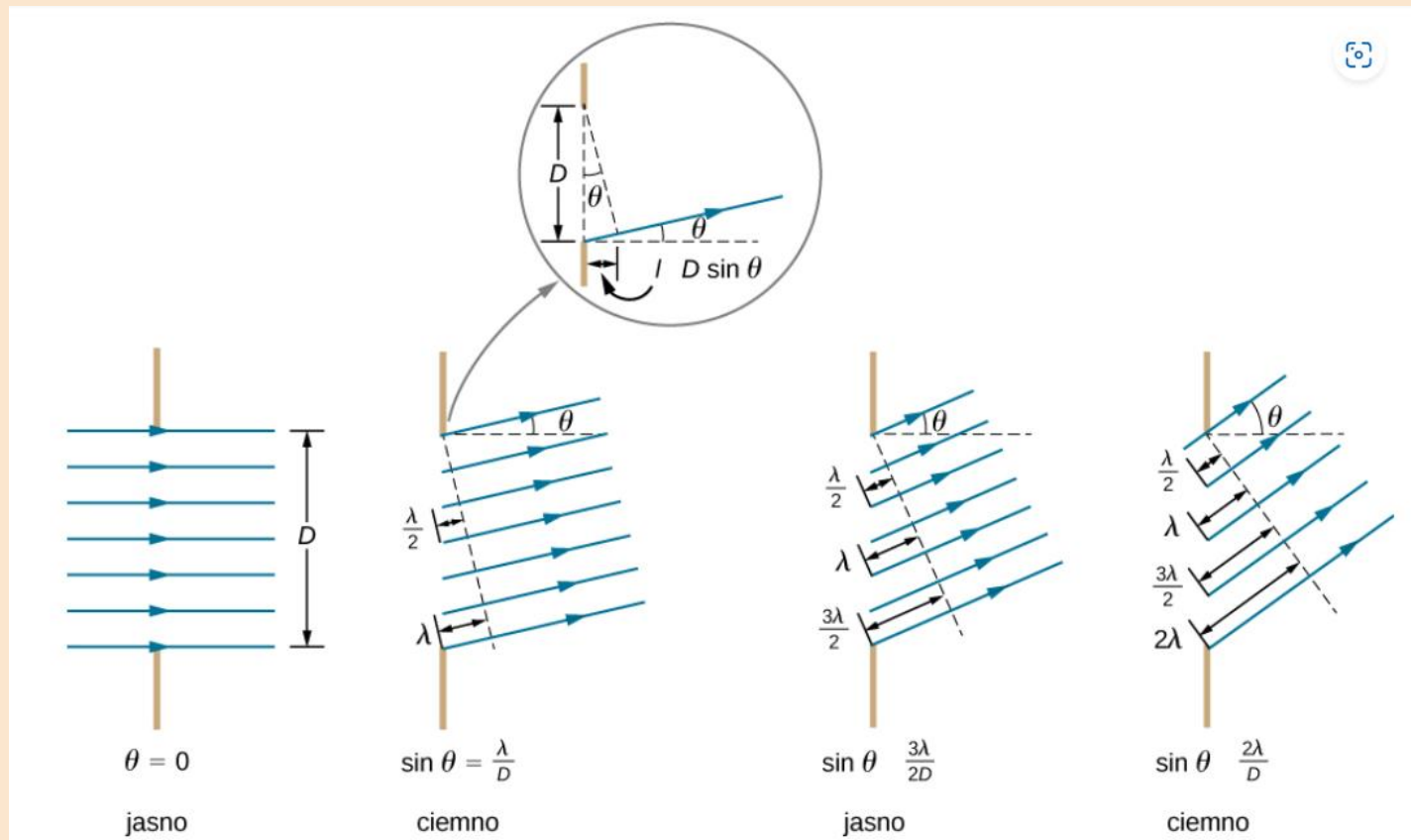
Dyfrakcja światła

Dla fali świetlnych dodając parę soczewek skupiających, możemy dyfrakcję Fresnela zamienić na prostszą w opisie dyfrakcją Fraunhofera.



Źródło światła i ekran znajdują się blisko szczeliny.

Dyfrakcja światła na pojedynczej szczelinie



$$\frac{1}{2} D \sin \theta = \frac{1}{2} \lambda \rightarrow D \sin \theta = \lambda$$

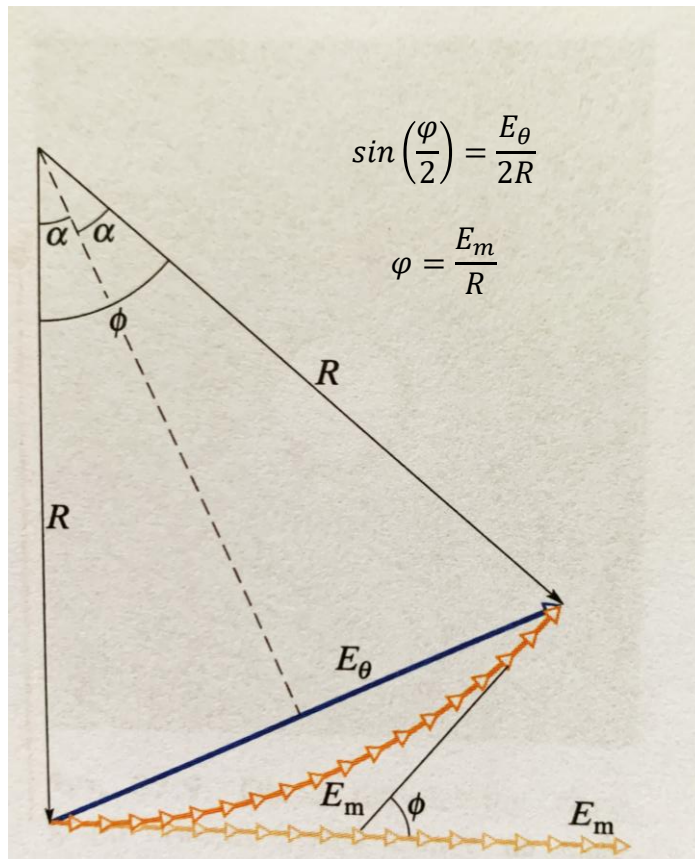
$$\frac{1}{4} D \sin \theta = \frac{1}{2} \lambda \rightarrow D \sin \theta = 2\lambda$$

Położenia minimów

$$D \sin \theta = n\lambda$$

$$n = 1, 2, 3 \dots$$

Dyfrakcja na szczelinie – natężenie światła



$$E_{\theta} = E_m \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\frac{\varphi}{2}}$$

$$I = I_m \frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2}$$

$$\varphi = 2\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} D \sin\theta$$

Dyfrakcja na szczelinie – natężenie światła

Zerowe główne maksimum:

$$\theta \approx 0 \longrightarrow \alpha \approx 0 \longrightarrow \sin \alpha \approx \alpha \longrightarrow I = I_0$$

Minima:

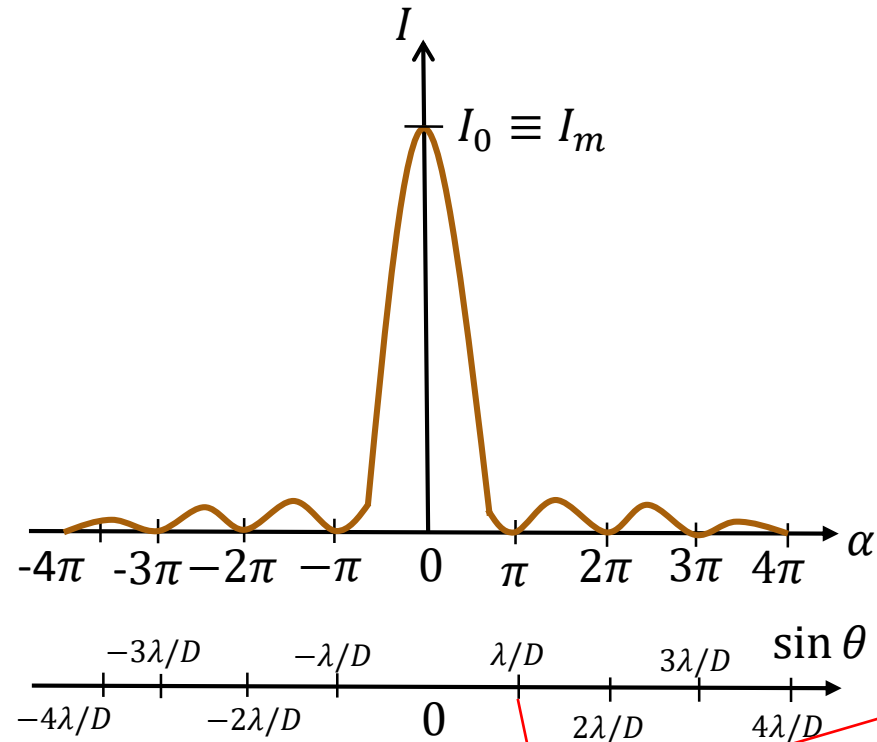
$$\alpha = n\pi \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$



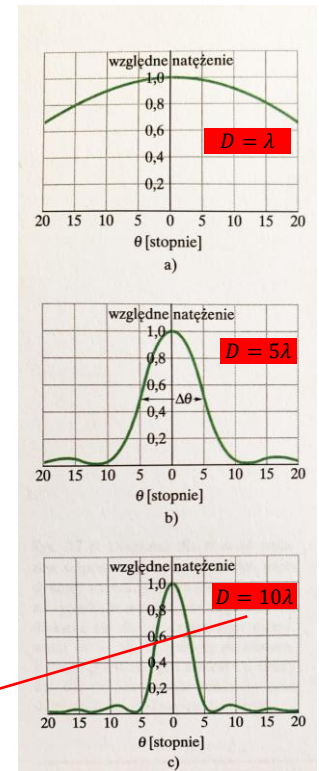
$$\frac{\pi}{\lambda} D \sin \theta = n\pi$$

$$D \sin \theta = n\lambda \quad (n = 1, 2, 3 \dots)$$

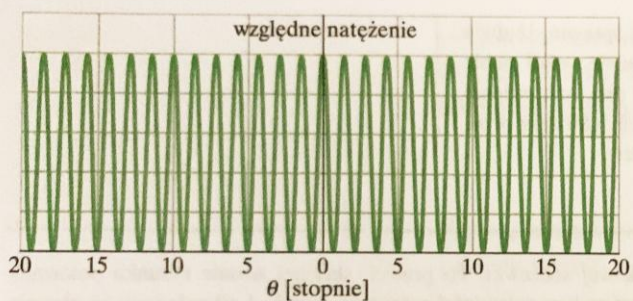
Obliczenia mają sens tylko dla $D > \lambda$!



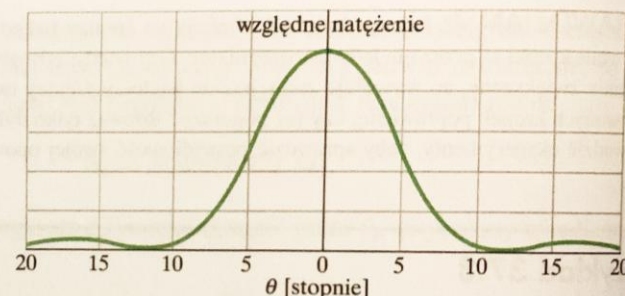
$$\alpha = \pi = \frac{\pi}{\lambda} D \sin \theta = 10\pi \sin \theta \rightarrow \theta \approx 5,7$$



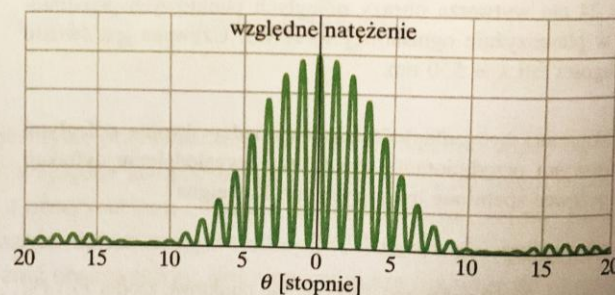
Złożenie interferencji i dyfrakcji – dyfrakcja na dwóch szczelinach



a)



b)



c)

Rys. 37.13. a) Oczekiwany wykres natężenia w doświadczeniu interferencyjnym z dwiema szczelinami o nieskończenie małej szerokości. b) Wykres natężenia dla dyfrakcji na typowej pojedynczej szczelinie (o skończonej szerokości a). c) Oczekiwany wykres natężenia dla dyfrakcji na dwóch szczelinach o szerokości a . Krzywa na rysunku (b) stanowi obwiednię ograniczającą natężenie prążków interferencyjnych z rysunku (a). Zauważ, że pierwsze minima obrazu dyfrakcyjnego z rysunku (b) tłumią na rysunku (c) prążki interferencyjne widoczne na rysunku (a) w pobliżu kąta 12°

$$I(\theta) = 4I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \cos^2 \beta =$$

$$= I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} \right)^2$$

$$4\cos^2 \beta = \left(\frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} \right)^2$$

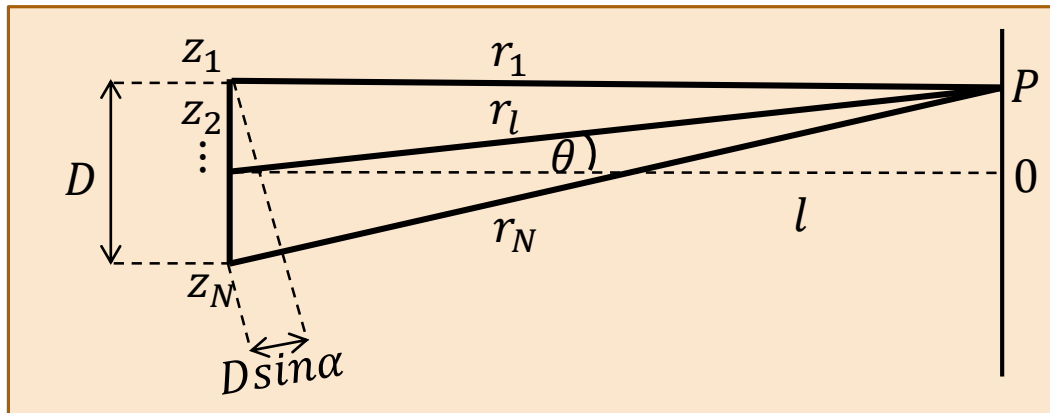
$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \quad \alpha = \frac{\pi D}{\lambda} \sin \theta$$

Dla $D \ll \lambda$ centralne maksimum dyfrakcyjne
każdej szczeliny pokrywa cały ekran
obserwacyjny!

Interferencja w polu w dużej odległości od **KILKU** źródeł punktowych

$$r_1 \parallel r_2 \quad \dots \quad r_{l-1} \parallel r_l \quad \dots \quad r_{N-1} \parallel r_N$$

Wszystkie źródła (z_1, z_2, \dots, z_N) wytwarzają fale zgodne w fazie.



$$D = (N - 1)d$$

Różnica faz fal wypromieniowanych przez sąsiednie źródła znajdujące się w odległości d :

$$k(r_2 - r_1) = k\Delta = kd \sin\theta$$

Różnica faz fal wypromieniowanych przez źródła znajdujące się w odległości $(N - 1)d$:

$$k(r_N - r_1) = k(N - 1)d \sin\theta$$

Fazy kolejnych N fal tworzą ciąg arytmetyczny!

Interferencja w polu w dużej odległości od **KILKU** źródeł punktowych

Aby otrzymać wypadkową amplitudę A sumujemy N drgań harmonicznycch:

$$a \cos(\omega t - kr_1),$$

$$a \cos(\omega t - kr_2) = a \cos(\omega t - kr_1 - kd \sin \theta),$$

$$a \cos(\omega t - kr_3) = a \cos(\omega t - kr_1 - 2kd \sin \theta),$$

⋮

$$a \cos(\omega t - kr_N) = a \cos[\omega t - kr_1 - k(N - 1)dsin\theta]$$

$$A = a \frac{\sin\left(\frac{N}{2}kdsin\theta\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}kdsin\theta\right)}$$

$$I = \frac{i_0}{2} \rho v \omega^2 a^2 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}kdsin\theta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kdsin\theta\right)}$$

$$I = i_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}k\Delta\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}k\Delta\right)} = i_0 \left(\frac{\sin(N\beta)}{\sin\beta}\right)^2$$

Siatka dyfrakcyjna

$$D \sin \theta_m = m \lambda \quad (m = \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$$

Pierwsze minimum dyfrakcyjne:

$$D \sin \theta_1 = \lambda$$

n -te maksimum interferencyjne

$$d \sin \theta_n = n \lambda \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots)$$

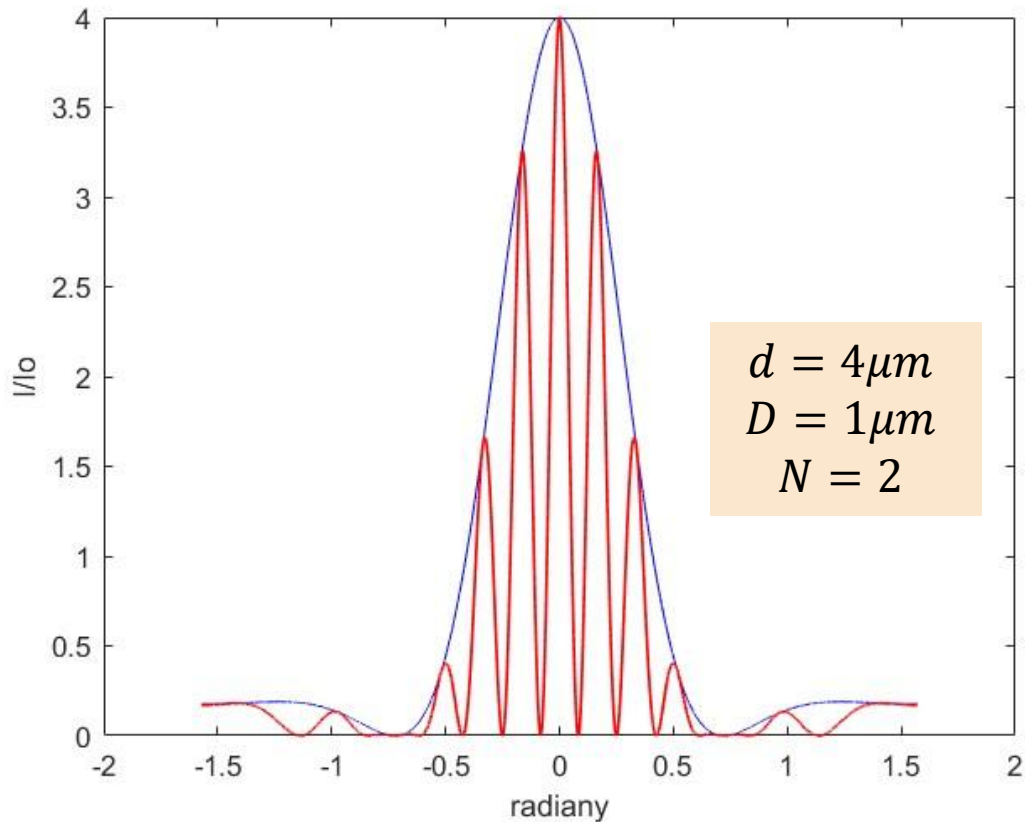
Gdy zachodzi: $\theta_n = \theta_1$

$$\frac{d}{D} = n$$

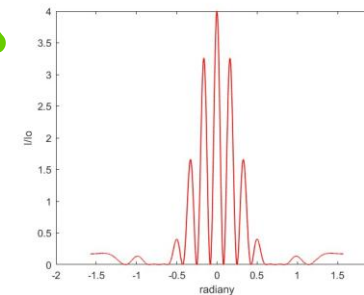
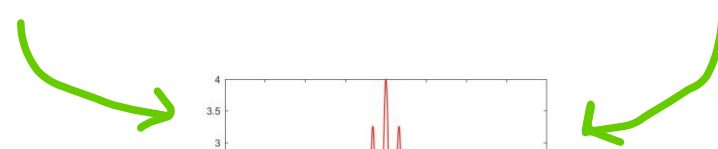
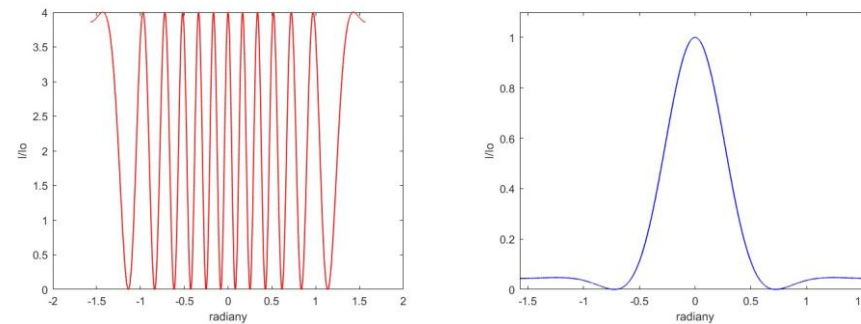
Dla całkowitych wartości $\frac{d}{D} = n$
główne maksimum interferencyjne
rzędu n ZNIKA!

Siatka dyfrakcyjna – przykład

$$I_{max} = 4I_0$$

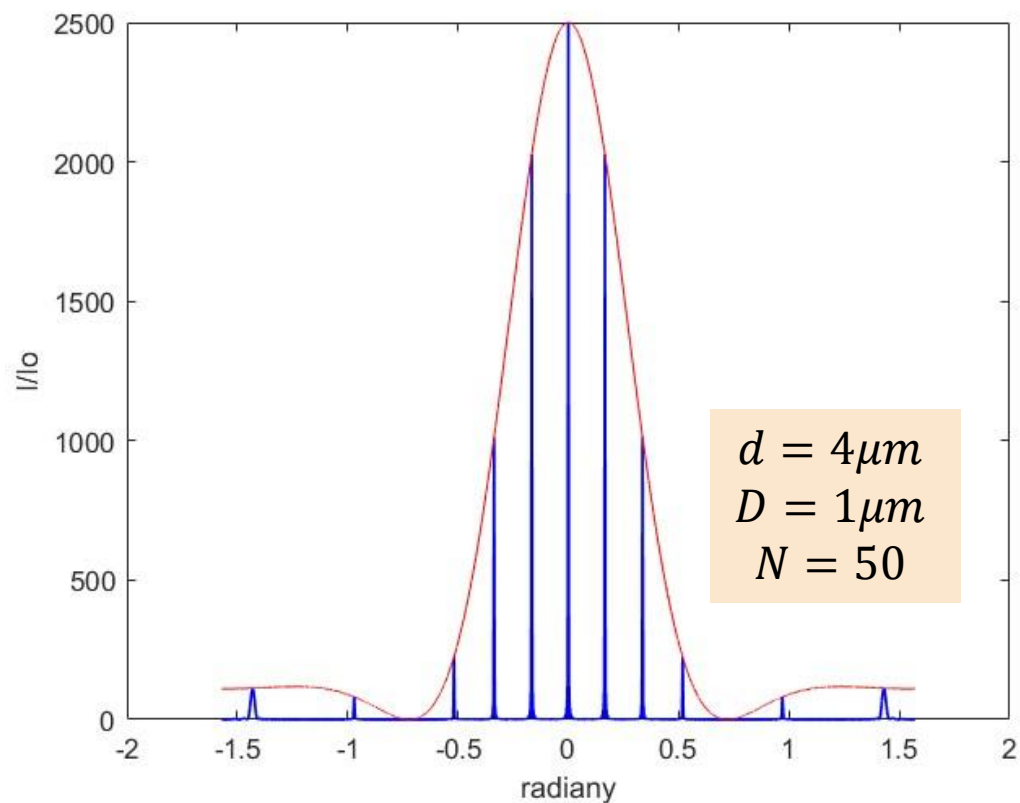


$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin 2\beta}{\sin \beta} \right)^2$$

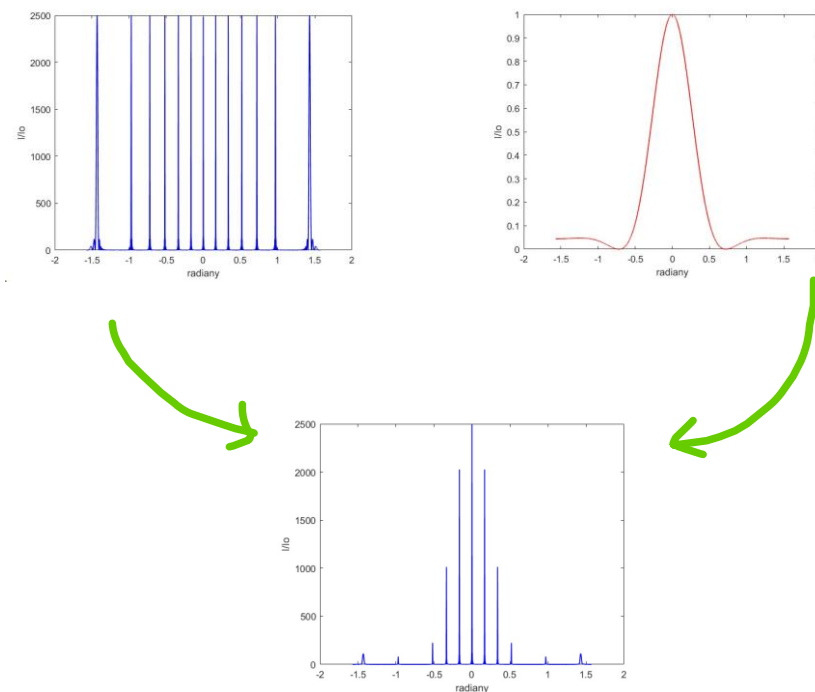


Siatka dyfrakcyjna - przykład

$$I_{max} = I_0 N^2 = I_0 (50)^2$$



$$I(\theta) = I_0 \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \left(\frac{\sin 50\beta}{\sin \beta} \right)^2$$



Przykłady

Zad. 1.

Wyznaczyć prędkość rozchodzenia się drgań dźwiękowych w powietrzu znając ich częstość, amplitudę i długość fali. Jak zmienia się w czasie prędkość cząsteczek powietrza?

Zad. 2.

Wiedząc, że długość fali sinusoidalnej biegnącej wzdłuż liny wynosi λ , a czas w jakim dowolny jej punkt przechodzi od swojego maksymalnego wychylenia do najbliższego minimalnego wychylenia wynosi t , wyznacz okres, częstość i prędkość tej fali.

Zad. 3.

Wiedząc, że prędkość fali sinusoidalnej wynosi $v = 70 \frac{m}{s}$, a jej częstotliwość wynosi $f = 50Hz$ wyznacz odległość między punktami, dla których różnica faz wynosi $\frac{\pi}{5}$, oraz różnicę faz odpowiadającą przemieszczeniu się wybranego jej punktu w czasie $\Delta t = 3ms$.

Przykłady

Zad. 4.

Korzystając ze wzoru:

$$I = I_0 \frac{\sin^2\left(\frac{N}{2}kdsin\alpha\right)}{\sin^2\left(\frac{1}{2}kdsin\alpha\right)}$$

wykazać, że natężenie fali wypadkowej w miejscach głównych maksimum interferencyjnych w polu dalekim układu N jednakowych źródeł punktowych rozłożonych wzdłuż odcinka o długości D w odległości d jedno od drugiego wynosi:

$$I_{max} = I_0 N^2,$$

gdzie α to kąt obserwacji maksimum interferencyjnych, a I_0 to natężenie pojedynczej fali biegnącej.

Wskazówka: maksimum natężenia wystąpi jeżeli różnica dróg pomiędzy falami z dwu sąsiednich źródeł wyniesie całkowitą wielokrotność długości fali λ .

Literatura

1. D. Holliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki T. 2 i 4, PWN, W-wa 2009, 2011 (lub inne wydania).
2. B. M. Jaworski, A. A. Piński, Elementy Fizyki tom 1 i 2, PWN, W-wa 1976 (lub nowsze wydania).
3. B. M. Jaworski, A. A. Dietłaf, Fizyka Poradnik encyklopedyczny, PWN, W-wa 1996 (lub nowsze wydania).
4. B. M. Jaworski, A. A. Dietłaf, Kurs fizyki tom 3, PWN, W-wa 1974 (lub nowsze wydania).
5. W. Żakowski, L. Leksiński, Matematyka część IV, WNT, W-wa 1971 (lub nowsze wydania).
6. Redakcja: K. Krop, K. Chłędowska, Fizyka I pracownia, Oficyna Wydawnicza PRz
7. W. Moebis, S. J. Ling, J. Sanny, Fizyka dla szkół wyższych Tom I, ISBN-13: 978-83-948838-1-2
<https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1>