Zasady zachowania energii i pędu. Zderzenia.

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

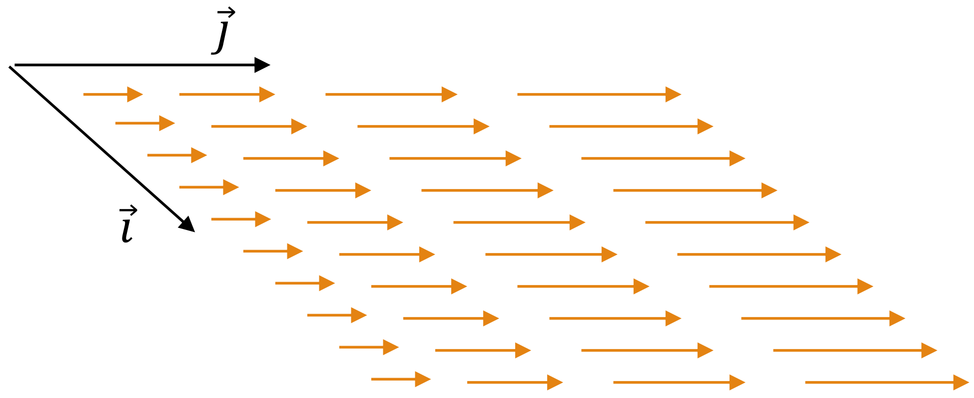
POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Gradient

Gradient wielkości skalarnej oznacza spadek lub narastanie tej wielkości w określonym kierunku!

$$\nabla f = \vec{\boldsymbol{i}}\frac{\partial f}{\partial x} + \vec{\boldsymbol{j}}\frac{\partial f}{\partial y} + \vec{\boldsymbol{k}}\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$\boldsymbol{df = gradf \cdot \overrightarrow{dr}}$$



$$\nabla f = \vec{\boldsymbol{j}}\frac{\partial f}{\partial y}$$

Dywergencja – przestrzenna gęstość strumienia pola wektorowego

$$\vec{A} = A_x(x,y,z)\vec{i} + A_y(x,y,z)\vec{j} + A_z(x,y,z)\vec{k}$$

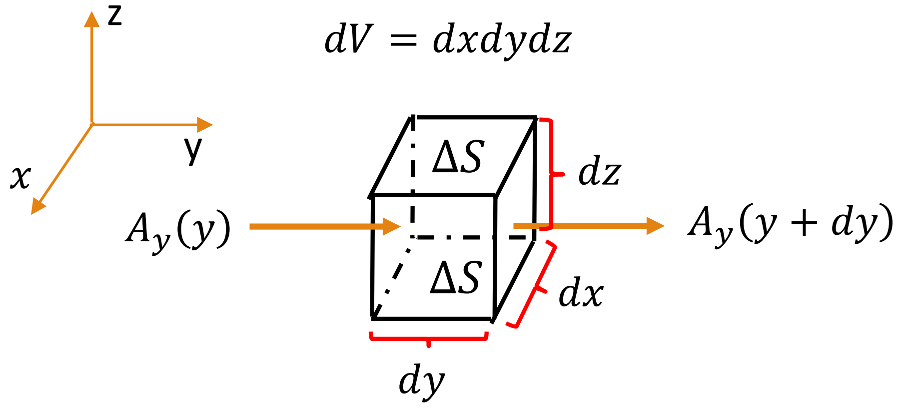
$$\boldsymbol{div\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x}dx = A_x(x+dx) - A_x(x)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y}dy = A_y(y+dy) - A_y(y)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z}dz = A_z(z+dz) - A_z(z)$$

<u>**Elementarny strumień** $d\Phi_y$ z powierzchni prostopadłej do osi y:</u>



$$d\Phi_y = \left[A_y(y+dy) - A_y(y)\right]dzdx = \frac{\partial A_y}{\partial y}dxdydz = \frac{\partial A_y}{\partial y}dV$$

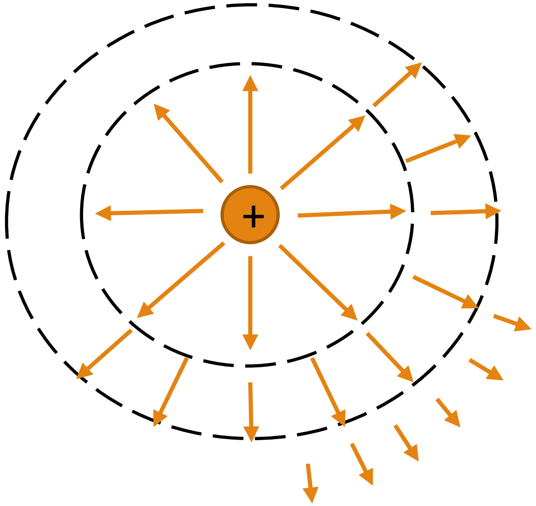
Całkowity elementarny strumień $d\Phi$ wynosi:

$$\boldsymbol{d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = div\vec{A}dV}$$

$$\boldsymbol{div\vec{A} = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{1}{\Delta V} d\Phi}$$

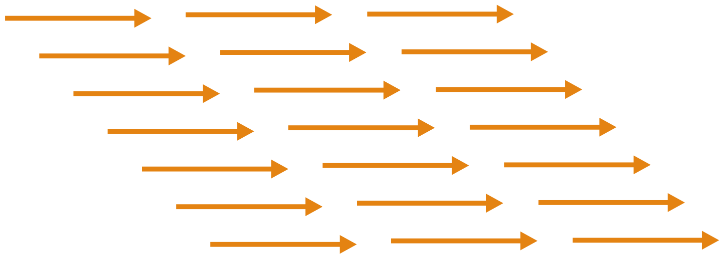
Dywergencja - zastosowania

Dywergencja indukcji pola elektrycznego:

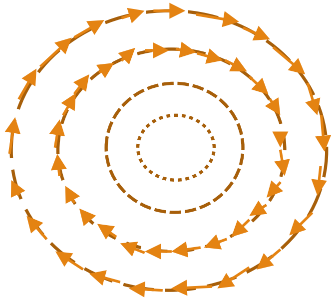


$$div\,\vec{D} \neq 0$$

Pola bezźródłowe:



Dywergencja indukcji pola magnetycznego:



$$div\,\vec{B} = 0$$

Rotacja wektora

$$\vec{A} = A_x(x,y,z)\vec{i} + A_y(x,y,z)\vec{j} + A_z(x,y,z)\vec{k}$$

$$\boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{\nabla} \times \vec{\boldsymbol{A}} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{A_z}}{\partial \boldsymbol{y}} - \frac{\partial \boldsymbol{A_y}}{\partial \boldsymbol{z}}\right)\vec{\boldsymbol{i}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{A_x}}{\partial \boldsymbol{z}} - \frac{\partial \boldsymbol{A_z}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)\vec{\boldsymbol{j}} + \left(\frac{\partial \boldsymbol{A_y}}{\partial \boldsymbol{x}} - \frac{\partial \boldsymbol{A_x}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)\vec{\boldsymbol{k}} \equiv$$

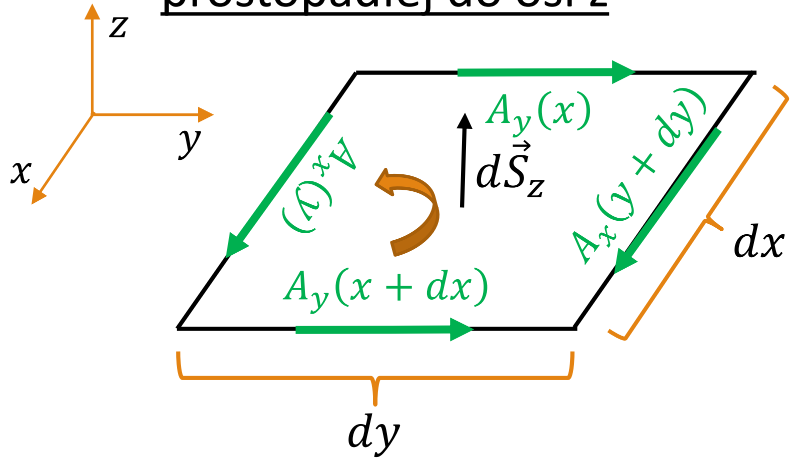
$$\equiv \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}} & \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}} & \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{z}} \\ \boldsymbol{A_x} & \boldsymbol{A_y} & \boldsymbol{A_z} \end{vmatrix}$$

Rotacja wektora

Całkowita elementarna cyrkulacja dO wynosi:

$$dO = \int \vec{A} \cdot d\vec{r} = dO_x + dO_y + dO_z$$

Elementarna cyrkulacja dO_z w płaszczyźnie prostopadłej do osi z



$$A_x(y+dy) = A_x(y) + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy$$

$$dO_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dxdy$$

$$dO_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dydz$$

$$dO_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dzdx$$

$$dO = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) dzdx + \\ + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\boldsymbol{dO = \left(rot\vec{A}\right)_x dS_z + \left(rot\vec{A}\right)_y dS_y + \left(rot\vec{A}\right)_z dS_z}$$

$$\boldsymbol{\left(rot\vec{A}\right)_n = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{1}{\Delta S} dO_n}$$

Energia potencjalna

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}, \dot{\vec{\boldsymbol{r}}}, \boldsymbol{t})$$

Pole sił zależnych od położenia: $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}})$

Jednorodne pole sił występuje, gdy siły są stałe co do wartości i kierunku we wszystkich punktach pola np. pole grawitacyjne w pobliżu Ziemi.

Praca siły pola:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Siła potencjalna zachowawcza: $\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}(\vec{\boldsymbol{r}}) = -\boldsymbol{grad}\, \boldsymbol{V}(\vec{\boldsymbol{r}})$

Pole siły potencjalnej zachowawczej jest bezwirowe:

$$\boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{0}$$

Praca potencjalnej zachowawczej siły pola:

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_{AB} \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$W_{AB} = -\int_{V_A}^{V_B} dV = V_A - V_B$$

Praca siły potencjalnej zachowawczej nie zależy od drogi wzdłuż której jest wykonywana, ale tylko od położenia jej punktu początkowego i końcowego.

Energia potencjalna: $\boldsymbol{V}(\vec{\boldsymbol{r}}) \equiv \boldsymbol{E_p}$

Zasada równoważności pracy i energii kinetycznej

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \vec{F}_w\cdot\vec{v}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}_w\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{t_A}^{t_B}\frac{d}{dt}\left(\frac{mv^2}{2}\right)dt = \int_{AB}\vec{F}_w\cdot d\vec{r}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{AB}\vec{F}_w\cdot d\vec{r}$$

Energia kinetyczna E_k punktu materialnego o masie m poruszającego się z prędkością $\vec{v}$:

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = \text{praca siły } \vec{F}_w$$

$$E_{k2} - E_{k1} = W$$

Zmiana energii kinetycznej punktu materialnego w skończonym przedziale czasu równa się pracy wykonanej w tym samym czasie przez siłę wypadkową $\vec{F}_w$.

Zasada zachowania energii

Praca wykonana przez wypadkową siłę $\vec{F}_w$:

$$\int_{AB} \vec{F}_w \cdot d\vec{r}$$

Pole siły potencjalnej zachowawczej:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -grad\, V(\vec{r})$$

$$E_{k2} - E_{k1} = -\int_{AB} grad\, V(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = -\int_{V_1}^{V_2} dV$$

$$E_{k2} - E_{k1} = V_1 - V_2$$

$$\boxed{E_{k2} + V_2 = E_{k1} + V_1}$$

Zasada zachowania pędu

Pęd $\vec{\boldsymbol{p}}$ punktu materialnego poruszającego się prędkością $\vec{v}$:

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}$$

Drugie prawo Newtona dla punktu materialnego, na które działają siły o wypadkowej $\vec{F}_w$:

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{w}} = \dot{\vec{\boldsymbol{p}}} = \frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}})$$

Popęd $\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{dt}$ sił działających na punkt materialny w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{dt} = \boldsymbol{m}\Delta\vec{\boldsymbol{v}}$$

Gdy na punkt materialny nie działają żadne siły $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{w}} = \mathbf{0}$ (popęd jest równy 0):

$$\frac{\boldsymbol{d}}{\boldsymbol{dt}}(\boldsymbol{m}\vec{\boldsymbol{v}}) = \mathbf{0}$$

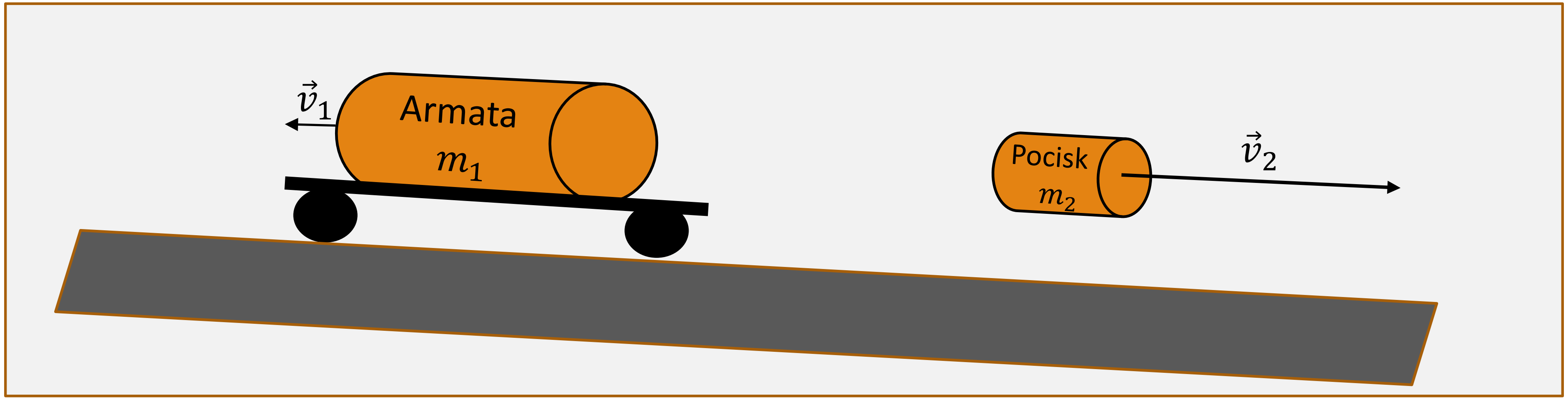
$$\Downarrow$$

$$\vec{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{const.}$$

Prawo zachowania pędu jest konsekwencją jednorodności przestrzeni.

Zasada zachowania pędu

Spoczywający względem podłoża wózek z armatą wystrzeliwującą pocisk



Iloczyn masy i wartości wektora prędkości dla wózka z armatą jest taki sam jak dla pocisku.

Zderzenia

Zderzenia to pewne (relatywnie krótkie) zdarzenie, podczas którego biorące w nim udział ciała oddziałują na siebie siłami.

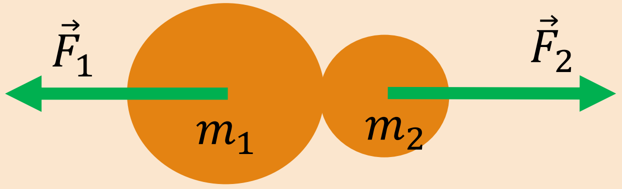
Zderzenia nie zmieniają całkowitego pędu układu!

Ze względu na geometrię zjawiska zderzenia dzielimy na **centralne** i **niecentralne**. Zderzenie dwóch ciał jest **centralne**, jeżeli oba ciała poruszają się po tej samej prostej, zarówno przed zderzeniem, jak i po zderzeniu np. zderzenie kul, których prędkości skierowane są wzdłuż linii łączącej środki tych kul. Zderzenie **niecentralne** ma miejsce wtedy, gdy zderzające się ze sobą ciała przed zderzeniem poruszają wzdłuż innych prostych niż po zderzeniu.

Zderzenia dzielimy również na **sprężyste** i **niesprężyste**. W zderzeniach **sprężystych**, całkowita energia kinetyczna jest zachowana tzn. energia kinetyczna ciał po zderzeniu jest równa całkowitej energii kinetycznej ciał przed zderzeniem. W zderzeniach **niesprężystych** energia kinetyczna nie jest zachowana, po zderzeniu ciała poruszają się razem z jednakową prędkością.

Zderzenia

Zmiany pędów cząstek pod wpływem zderzenia:



$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{1}} = -\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{2}}$$

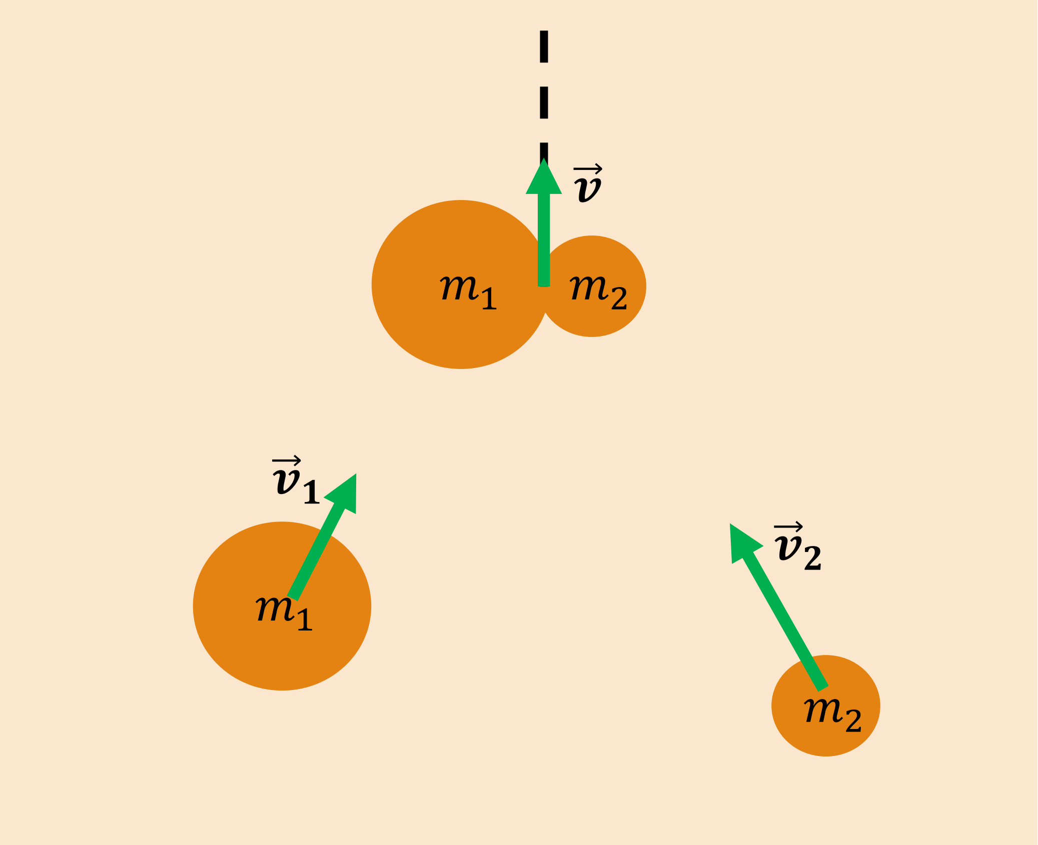
Popęd siły $\vec{F}_1$: $\Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{1}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{1}}\Delta\boldsymbol{t}$

Popęd siły $\vec{F}_2$: $\Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{2}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{2}}\Delta\boldsymbol{t}$

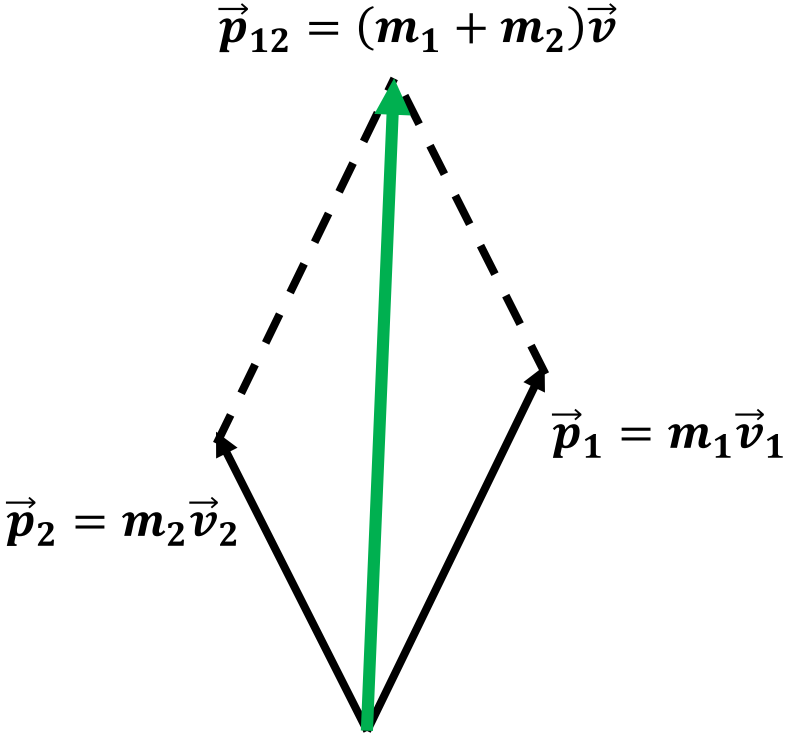
$$\Delta\vec{\boldsymbol{P}} = \Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{1}} + \Delta\vec{\boldsymbol{p}}_{\boldsymbol{2}} = \boldsymbol{0}$$

Podczas zderzenia obowiązuje prawo zachowania całkowitego pędu cząstek!

Zderzenia niesprężyste, niecentralne dwóch kul

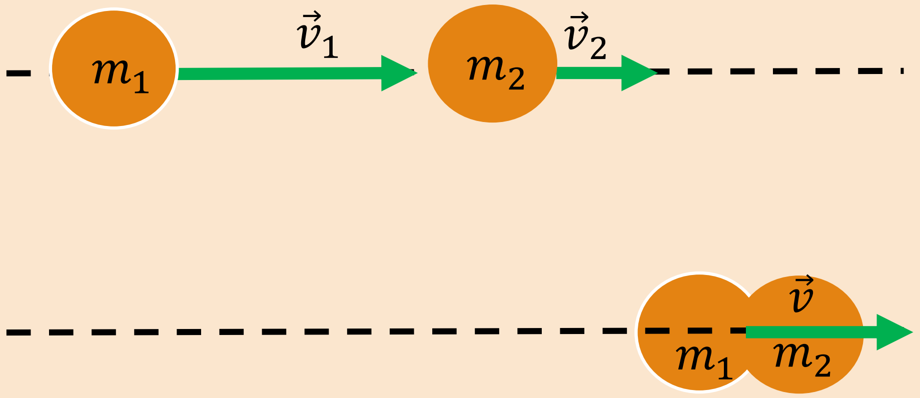


Obowiązuje zasada zachowania pędu:



Zderzenia centralne, niesprężyste dwóch kul

Podczas zderzenia obydwa ciała odkształcają się trwale:



Zasada zachowania pędu:

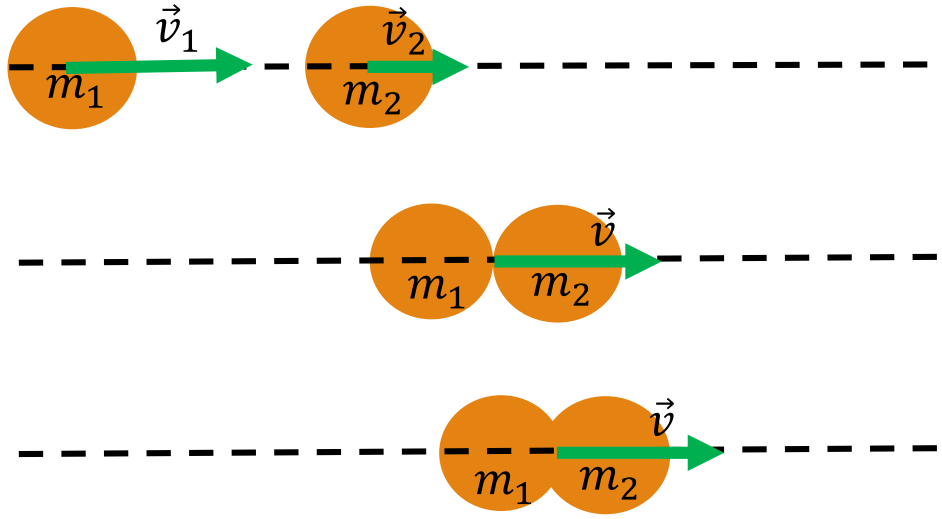
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

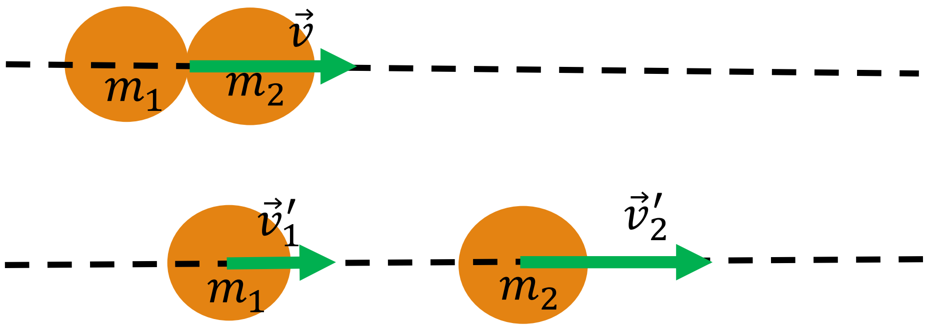
$$\underbrace{m_1 v_1 - m_1 v}_{\text{strata pędu ciała 1}} = \underbrace{m_2 v - m_2 v_2}_{\text{zysk pędu ciała 2}}$$

$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

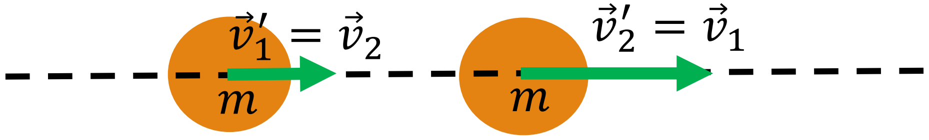
Zderzenia, centralne, sprężyste dwóch kul

Podczas zderzeń sprężystych kule odkształcają się i bardzo szybko powracają do swoich pierwotnych postaci.





Gdy $m_1 = m_2 = m$:



Zderzenia, centralne, sprężyste dwóch kul

Dla $\boldsymbol{v_1 > v_2}$:

pęd kuli o masie m_2 po zderzeniu:

$$\boldsymbol{p_2' = m_2 v_2' = m_2 v_2 + 2(m_2 v - m_2 v_2)}$$
$$\boldsymbol{v_2' = 2v - v_2}$$

pęd kuli o masie m_1 po zderzeniu:

$$\boldsymbol{p_1' = m_1 v_1' = m_1 v_1 - 2(m_1 v_1 - m_1 v)}$$

$$\boldsymbol{v_1' = 2v - v_1}$$

Dla $\boldsymbol{m_1 = m_2}$:

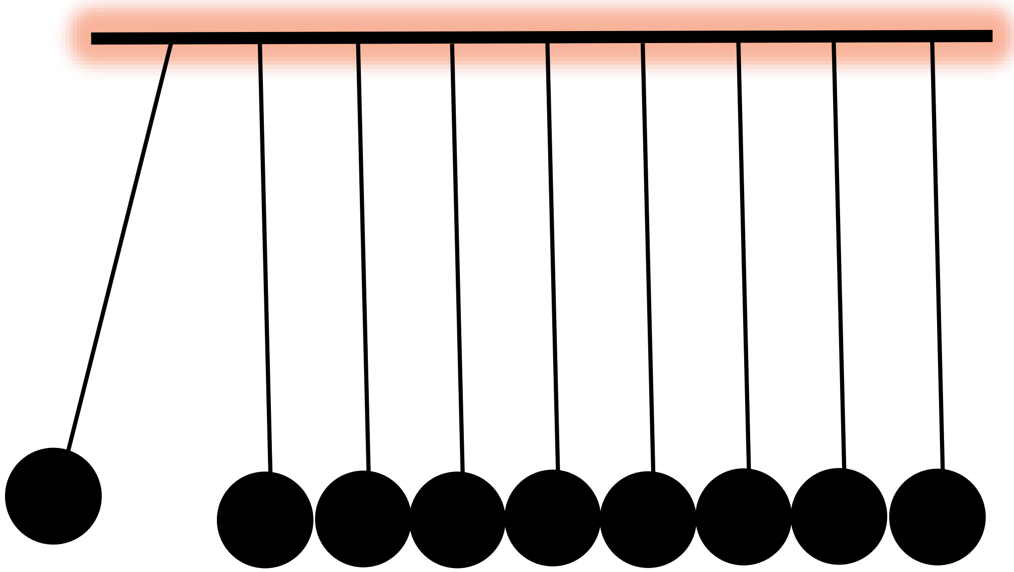
$$\boldsymbol{v = \frac{v_1 + v_2}{2}}$$

$$\boldsymbol{v_1' = v_1 + v_2 - v_1 = v_2}$$
$$\boldsymbol{v_2' = v_1 + v_2 - v_2 = v_1}$$

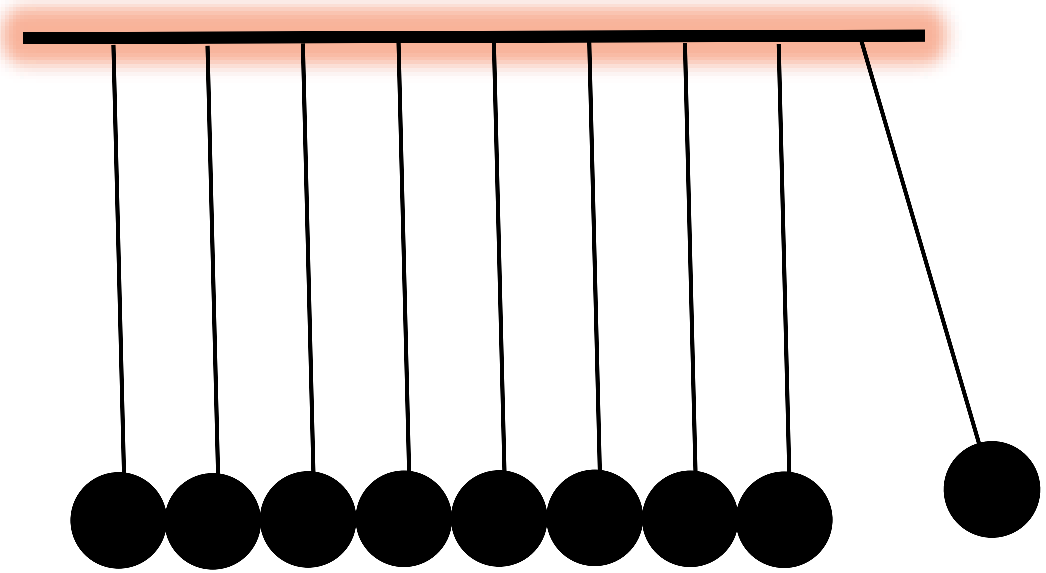
Wymiana prędkości

Dla $m_1 = m_2, v_2 = 0$: $\quad v = \frac{v_1}{2}$

$v_1' = 2v - v_1 = 0 \qquad v_2' = 2v - v_2 = v_1$



Kula uderzona przejmuje prędkość kuli uderzającej!



Zderzenie sprężyste kuli ze ścianą

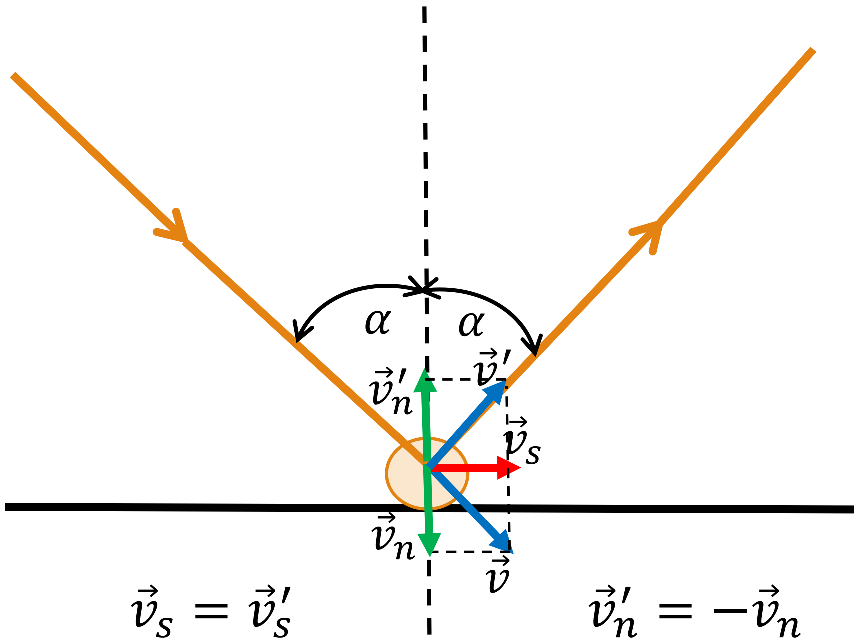
Kula pada z prędkością v_1 prostopadle na ścianę pozostającą w spoczynku ($v_2 = 0$)

$$\lim_{m_2\to\infty} v = \lim_{m_2\to\infty} \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} =$$

$$= \lim_{m_2\to\infty} \frac{\frac{m_1}{m_2} v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = v_2 = 0$$

$$v_1' = 2v - v_1 = -v_1 \qquad v_2' = 2v - v_2 = 0$$

Kula pada na sprężystą ścianę pod dowolnym kątem α (tarcie pomijamy)

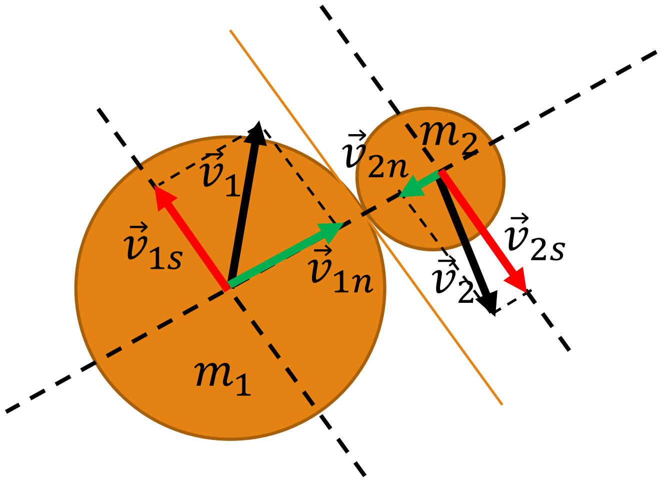


$\vec{v}_s = \vec{v}_s'$ $\qquad$ $\vec{v}_n' = -\vec{v}_n$

Zderzenia, niecentralne, sprężyste dwóch kul

Siły działające na skutek deformacji kul mają kierunek normalnej do powierzchni kul w punkcie styczności. Zmianie ulegają tylko składowe normalne prędkości obu kul

(jak w zderzeniu centralnym).



$$v'_{1n} = 2v - v_{1n} \qquad v'_{2n} = 2v - v_{2n}$$

$$v = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}$$

Jeżeli założymy, że **tarcie pomiędzy kulami nie istnieje** to składowe styczne prędkości nie ulegają zmianie.

Prędkości po zderzeniu:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_{1s} + \vec{v}'_{1n} \qquad \vec{v}'_2 = \vec{v}_{2s} + \vec{v}'_{2n}$$

Gdy $v_2 = 0$ oraz $m_1 = m_2$ (billard):

$$v = \frac{v_{1n}}{2} \qquad \vec{v}'_{1n} = 0 \qquad \vec{v}'_{2n} = v_{1n}$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_{1s} \qquad \vec{v}'_2 = \vec{v}_{1n}$$

Przykłady

Zad. 1.

Równania ruchu cząstki o masie m dane są następująco: $x = Asin\varphi, y = Bcos\varphi, (\varphi = \omega t, \omega = const.; A, B = const.)$.

1) Wyznaczyć prędkość, energię kinetyczną, siłę działającą na cząstkę, pracę wykonaną przez tę siłę pomiędzy punktami $(x = A, y = 0)\ i\ (x = 0, y = B)$ i energię potencjalną cząstki.

2) Sprawdzić działanie zasady równoważności energii kinetycznej i pracy.

3) Pokazać, że całkowita energia cząstki nie zależy od czasu.

Zad. 2.

Kula bilardowa uderza w taką samą kulę będącą w spoczynku. Wyznaczyć kąt między kierunkami ruchu kul po zderzeniu.

Literatura

1. I. W. Sawieliew, KURS FIZYKI T. 1 „Mechanika”, „Fizyka cząsteczkowa”, PWN, W-wa 1987 (lub nowsze wydania).

2. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki T. 1, PWN, W-wa 1984 (lub inne wydania).

3. A. Hennel, W. Krzyżanowski, W. Szuszkiewicz, K. Wódkiewicz, Zadania i problemy z fizyki T. 1, PWN, W-wa 1974 (lub inne wydania).

4. G. Białkowski, Mechanika klasyczna, PWN, W-wa 1975 (lub inne wydania).

5. A. Piekara, Mechanika ogólna, PWN, W-wa 1973 (lub inne wydania).

6. B. M. Jaworski, A. A. Piński T. 1, PWN, W-wa 1977 (lub inne wydania).

7. E. Karaśkiewicz, Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, W-wa 1976 (lub inne wydania).