Pochodna funkcji jednej zmiennej i pochodna cząstkowa.

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Różniczka funkcji

Funkcję f nazywamy **różniczkowalną** w punkcie x_0 jeżeli jej zmiana dla $\Delta \boldsymbol{x} \to \mathbf{0}$:

$$\boldsymbol{\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$

może być przedstawiona w postaci:

$$\Delta \boldsymbol{f} = \boldsymbol{C}\Delta \boldsymbol{x} + \boldsymbol{o}(\Delta \boldsymbol{x}),$$

gdzie C to stała, $o(\Delta x)$ to nieskończenie mała rzędu wyższego niż Δx.

Jeżeli funkcja f jest różniczkowalna w punkcie x_0 to istnieje pochodna funkcji f równa:

$$\boldsymbol{f'(x_0) = C}$$

Różniczka funkcji f w punkcie x_0 (dla przyrostu Δx zmiennej niezależnej x) $\boldsymbol{df(x_0)}$ to liniowy składnik przyrostu Δf ze względu na Δx:

$$\boldsymbol{df \equiv df(x_0) = f'(x_0)\Delta x}$$

Różniczka funkcji – przykłady

$$\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)}$$

1. Pole $\boldsymbol{P(r)}$ koła o promieniu $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{P = \pi r^2}$$

zwiększamy promień koła o Δr:

$$\Delta P = P(r + \Delta r) - P(r)$$

$$\Delta P = \pi(r + \Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi \Delta r^2 + 2\pi r \Delta r$$

$$\Delta r \to 0$$

$$\mathrm{d}P = 2\pi r dr$$

Różniczka funkcji – przykłady

$$\boldsymbol{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)}$$

---

2. Objętość V($\boldsymbol{r}$) kuli o promieniu $\boldsymbol{r}$:

$$\boldsymbol{V=\frac{4}{3}\pi r^3}$$

zwiększamy promień kuli o Δr:

$$\Delta V=V(r+\Delta r)-V(r)$$

$$\Delta V=\frac{4}{3}\pi(r+\Delta r)^3-\frac{4}{3}\pi r^3$$

$$\Delta V=4\pi r^2\Delta r+4\pi r\Delta r^2+\frac{4}{3}\pi\Delta r^3$$

$$\Delta r\to 0$$

$$\mathrm{d}V=4\pi r^2 dr$$

Iloraz różnicowy. Interpretacja fizyczna

$$f(x) = y$$

$$\frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0}+\Delta \boldsymbol{x})-\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x_0})}{\Delta \boldsymbol{x}}$$

Δx – przyrost zmiennej niezależnej x

Punkt x_0 wraz z pewnym jego otoczeniem Q należy do dziedziny funkcji f.

$$\Delta x + x_0 \in Q$$

Przykład:

$$f(x) = 2x^2$$

$$\frac{\Delta \boldsymbol{y}}{\Delta \boldsymbol{x}} = \frac{2(x_0+\Delta x)^2-2x_0^2}{\Delta x} = 4x_0 + 2\Delta x$$

Prędkość średnia w przedziale czasu Δt:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{x}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0}+\Delta \boldsymbol{t})-\boldsymbol{x}(\boldsymbol{t_0})}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

Przyspieszenie średnie (dla zmiany prędkości $\Delta \boldsymbol{v_x}$) w przedziale czasu Δt:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{v_x}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{v_x}(\boldsymbol{t_0}+\Delta \boldsymbol{t})-\boldsymbol{v_x}(\boldsymbol{t_0})}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

Natężenie średnie prądu (dla zmiany ładunku elektrycznego Δq) w przedziale czasu Δt:

$$\frac{\Delta \boldsymbol{q}}{\Delta \boldsymbol{t}} = \frac{\boldsymbol{q}(\boldsymbol{t_0}+\Delta \boldsymbol{t})-\boldsymbol{q}(\boldsymbol{t_0})}{\Delta \boldsymbol{t}}$$

Interpretacja geometryczna. Granica ilorazu różnicowego – pochodna funkcji.

$$\frac{\boldsymbol{dy}}{\boldsymbol{dx}} \equiv \boldsymbol{f'(x_0)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boldsymbol{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}}{\boldsymbol{\Delta x}}$$

$$f(x) = const. \Rightarrow f'(x) = 0$$

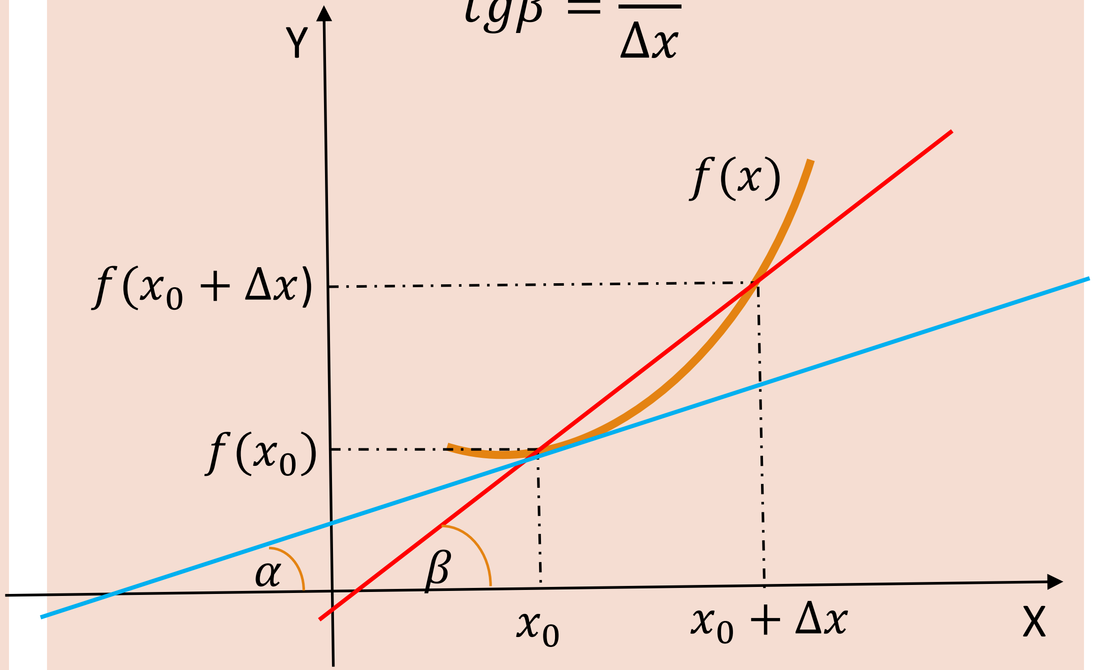
$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \quad (x > 0, n \in \mathbb{R})$$

$$tg\alpha = f'(x_0)$$

$$tg\beta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Własności pochodnych.

Dla funkcji f *i* g różniczkowalnych w punkcie *x*, zachodzi:

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$

$$(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$$

$$\bigwedge_{a\in\mathbb{R}} (af)'(x) = af'(x)$$

$$(f\cdot g)'(x) = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

Dla $g(x) \neq 0$ i $g'(x) \neq 0$ zachodzi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$$

Przykłady

$$(sin\,x)' = cos\,x$$

$$(cos\,x)' = -sin\,x$$

$$(tg\,x)' = \frac{1}{cos^2x}$$

$$(ctg\,x)' = -\frac{1}{sin^2x}$$

$$(e^x)' = e^x$$

$$[\ln(x)]' = \frac{1}{x}$$

$$(a^x)' = a^x \cdot lna$$

$$(log_a x)' = \frac{1}{xlna}$$

Interpretacja fizyczna pochodnej

<u>Prędkość v w chwili czasu t_0:</u>

$$\boldsymbol{v_x(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}}$$

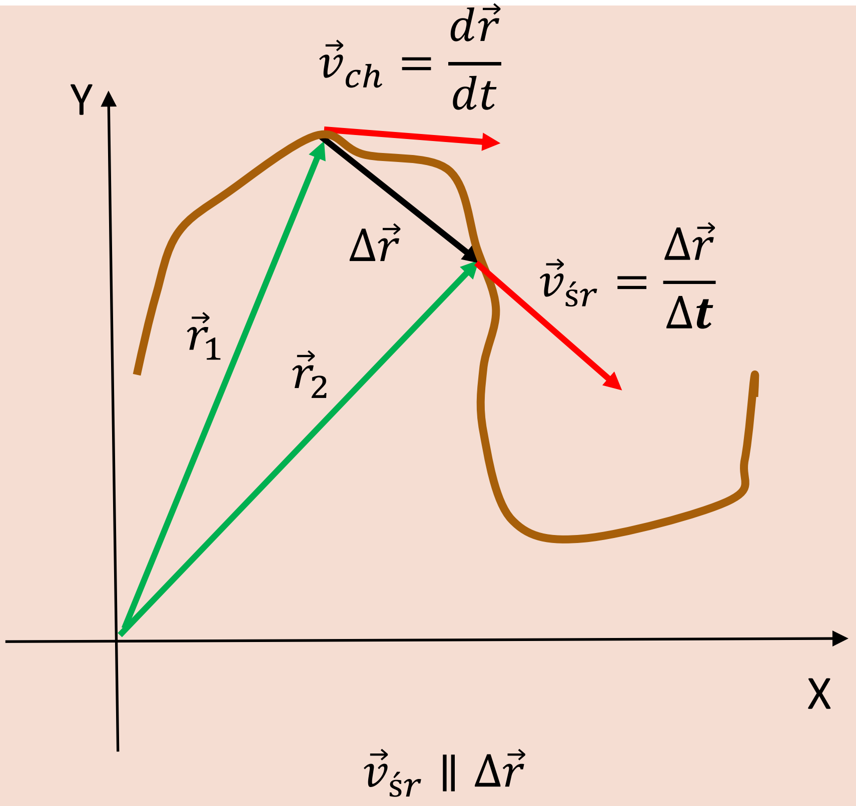
<u>Natężenie prądu w chwili czasu t_0:</u>

$$\boldsymbol{I(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t_0 + \Delta t) - q(t_0)}{\Delta t}}$$

<u>Przyspieszenie w chwili czasu t_0:</u>

$$\boldsymbol{a_x(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{v_x(t_0 + \Delta t) - v_x(t_0)}{\Delta t}}$$

Prędkość jako pochodna



<u>Prędkość $\vec{v}$ w chwili czasu t_0</u>

$$\vec{v}_{ch}(t_0) \equiv \vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{ch}(t_0) \equiv \vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{\Delta t}$$

$$\vec{v}_{ch}(t_0) \equiv \vec{v}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t_0 + \Delta t) - \vec{r}(t_0)}{\Delta t}$$

Wektor prędkości chwilowej jest styczny do toru w punkcie, gdzie cząstka jest obecna w danej chwili czasu.

Pochodne wyższych rzędów

Pochodna drugiego rzędu funkcji $f(x)$ to pochodna pierwszej pochodnej funkcji $\mathrm{y} = f(x)$, czyli pochodna funkcji $\frac{dy}{dx}$, którą oznacza się następująco:

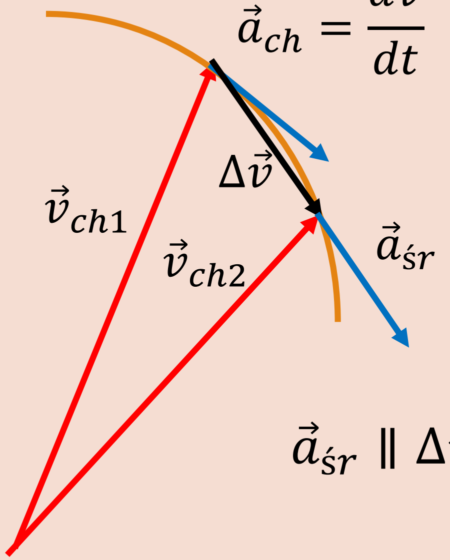
$$\boldsymbol{f''(x) \equiv \frac{d^2y}{dx^2}}$$

Pochodna n-tego rzędu funkcji $f(x)$ to pochodna $(n-1)-\mathrm{szej}$ pochodnej funkcji $\mathrm{y} = f(x)$, czyli pochodna funkcji $\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}$.

Pochodna wielomianu, którego stopień jest mniejszy od rzędu pochodnej jest równa zeru!

Przyspieszenie jako pochodna

Hodograf prędkości



$$\vec{a}_{ch} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\vec{a}_{śr} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{śr} \parallel \Delta\vec{v}$$

Wektor przyspieszenia chwilowego jest skierowany wzdłuż stycznej do hodografu prędkości.

Przyspieszenie $\vec{a}$ w chwili czasu t_0

$$\vec{a}_{ch}(t_0) \equiv \vec{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{ch}(t_0) \equiv \vec{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}_{ch2} - \vec{v}_{ch1}}{\Delta t}$$

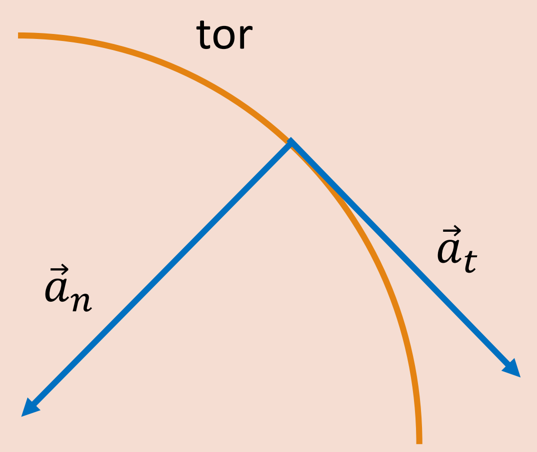
$$\vec{a}_{ch}(t_0) \equiv \vec{a}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t_0 + \Delta t) - \vec{v}(t_0)}{\Delta t}$$

$$\vec{a}_{ch} \equiv \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Przyspieszenie normalne i styczne

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{e}_t}_{\substack{\text{Przyspieszenie styczne} \\ \vec{a}_t = a_t\vec{e}_t}} + \overbrace{v\frac{d\vec{e}_t}{dt}}^{\substack{\text{Przyspieszenie normalne} \\ \vec{a}_n = a_n\vec{e}_n}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_{tr}) = ?$$



Pochodna cząstkowa

Pochodną cząstkową

I-go rzędu funkcji wielu zmiennych

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{D} \to \mathbb{R}, D \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$$

w punkcie

$$P(r_1, r_2, \dots, r_n) \in D$$

nazywamy następującą granicę

$$\lim_{\Delta \boldsymbol{r} \to 0} \frac{\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r_1}, \dots, \boldsymbol{r_i} + \Delta \boldsymbol{r}, \dots, \boldsymbol{r_n}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{r_1}, \dots, \boldsymbol{r_i}, \dots, \boldsymbol{r_n})}{\Delta \boldsymbol{r}}$$

i oznaczamy przez

$$\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{r_i}}(r_1, r_2, \dots, r_n) \equiv \boldsymbol{f}'_{r_i}(r_1, r_2, \dots, r_n)$$

Przykład: $n = 2, P(x_0, y_0) \in D$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}$$

Wyznaczając pochodne cząstkowe możemy korzystać ze wszystkich znanych reguł liczenia pochodnej funkcji jednej zmiennej!

Różniczka zupełna

Funkcję wielu zmiennych $g = f(x, y, \dots, t)$ nazywamy **różniczkowalną** w punkcie $P_0(x_0, y_0, \dots, t_0)$, jeżeli dla dowolnie bliskiego punktu $P(x_0 + dx, y_0 + dy, \dots, t_0 + dt)$ całkowity przyrost funkcji w punkcie P_0:

$$\Delta g = f(x_0 + dx, y_0 + dy, \dots, t_0 + dt) - f(x_0, y_0, \dots, t_0)$$

różni się o nieskończenie małą* od **sumy jej różniczek cząstkowych** względem wszystkich zmiennych (**zwanej wówczas RÓŻNICZKĄ ZUPEŁNĄ**) :

$$\boldsymbol{dg = \frac{\partial g}{\partial x} dx + \frac{\partial g}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial g}{\partial t} dt}$$

*mała rzędu wyższego niż $P_0P = \sqrt{dx^2 + dy^2 + \dots + dt^2}$

Pomiary pośrednie - niepewności pomiarowe

Jak oszacować **niepewność pomiarową**

$u(y)$ wielkości mierzonej pośrednio?

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\boldsymbol{u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)^2 u(x_i)^2}}$$

Przykład:

<u>Wyznaczanie równoważnika elektrochemicznego k miedzi</u>

$$\boldsymbol{k = \frac{m_2 - m_1}{It}}$$

$m_2 - m_1$ - masa wydzielonej na katodzie miedzi

I – natężenie prądu przepływającego przez elektrolit (wodny roztwór siarczanu miedzi $CuS0_4$)

t – czas przebiegu elektrolizy

$$u(k) = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m_1}\right)^2 (u(m_1))^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial m_2}\right)^2 (u(m_2))^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial I}\right)^2 (u(I))^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial t}\right)^2 (u(t))^2}$$

Przykłady

Zad. 1.

Równanie ruchu ciała poruszającego się po linii prostej ma postać: $s = 2t^3 + \frac{1}{2}t^2 - \mathrm{t} + 3$. Wyznaczyć przyspieszenie ruchu ciała w zależności od t.

Zad. 2.

Mając dane zależności od czasu współrzędnych punktu położenia ciała w przestrzeni $\mathbb{R}^2$:

$x = c_1 t\ cos\ (\omega t),\ \ y = c_1 t\ sin\ (\omega t)$, obliczyć zależności od czasu wartości wektora prędkości $\vec{v}$ oraz wektora przyspieszenia $\vec{a}$, gdzie ω i c_1 są wartościami stałymi (niezależnymi od czasu).

Literatura

1. W. Krysicki, L. Włodarski, „Analiza matematyczna w zadaniach", cz. I i II, PWN

2. K. Krop, K. Chłędowska, Fizyka I pracownia, OWPRz, Rzeszów 2017 (lub inne wydania)

3. I. W. Sawieliew, KURS FIZYKI T. 1 „Mechanika", „Fizyka cząsteczkowa", PWN, W-wa 1987 (lub nowsze wydania).

4. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, „Wstęp do fizyki", T. 1, PWN