

Ruch drgający.

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Ruch drgający

Drgania inaczej oscylacje to pewne procesy, które powtarzają się w czasie.

Rozróżnić można **drgania mechaniczne** (np.: ruch wahadeł, drgania strun, zmiany ciśnienia powietrza), **drgania elektromagnetyczne**, **drgania elektromechaniczne** (np.: drgania membrany głośnika) i inne.

Drgania swobodne zwane inaczej **drganiami własnymi** to drgania ciała wywołane wychyleniem z położenia równowagi trwałej, kiedy na układ drgający nie działają żadne zmienne w czasie oddziaływania zewnętrzne.

Drgania wymuszone powstają w układzie na skutek zmiennego w czasie oddziaływania zewnętrznego.

Ruch drgający okresowy

Jeżeli wartości wszystkich wielkości fizycznych zmieniających się w czasie drgań i opisujących układ drgający, powtarzają się w równych odstępach czasu, to drgania układu nazywamy **drganiami okresowymi**, których przykład stanowią **drgania harmoniczne**.

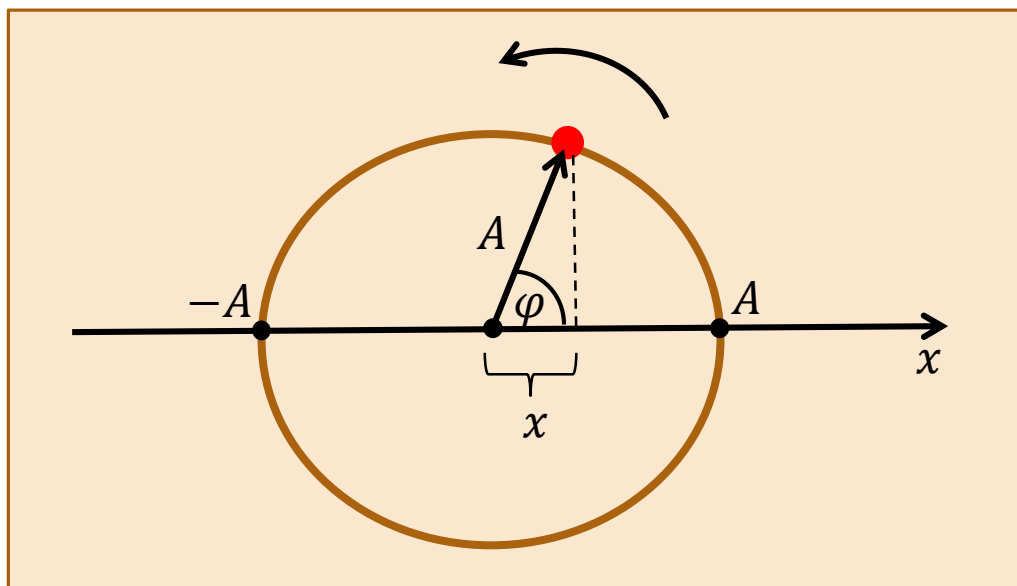
Okres drgań T to czas w którym układ drgający wykonuje jedno pełne drganie.

Częstotliwość drgań okresowych f to liczba pełnych drgań wykonanych w jednostce czasu.

Drgania okresowe drgającej wielkości x , występują wtedy, gdy spełniony jest warunek:

$$x(t + T) = x(t)$$

Drgania harmoniczne proste



Ciało wykonuje ruch harmoniczny wokół położenia równowagi $x = 0$.

Ruch rzutu punktu poruszającego się po okręgu ruchem jednostajnym na oś x (średnicę) nazywamy ruchem harmonicznym prostym.

Punkt materialny porusza się zgodnie z prawem:

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

A – amplituda drgania (maksymalne wychylenie) $[m]$

ω – częstość kołowa drgania

$(\omega t + \varphi)$ – faza drgania

φ – faza początkowa drgania

Drgania harmoniczne proste

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$$

lub

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) =$$

$$= A[\cos(\omega t)\cos(\varphi) - \sin(\omega t)\sin(\varphi)]$$



$$A_1 = -A \sin(\varphi), A_2 = A \cos(\varphi)$$

$$\sqrt{A_1^2 + A_2^2} = A$$

$$\frac{A_1}{A_2} = -\operatorname{tg}(\varphi) = \operatorname{tg}(-\varphi)$$



$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{A_1}{A_2}\right)$$

Drgania harmoniczne proste

Pierwsza i druga pochodna drgającej w sposób harmoniczny wielkości x wykonują również drgania harmoniczne z częstością kołową ω :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \longrightarrow \quad \frac{d\omega}{dt} = 0$$

$$\frac{dx}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi) = A\omega \cos\left(\omega t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

Równanie różniczkowe drgań harmoniczných:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Rozwiązanie ogólne tego równania ma postać:

$$x(t) = A_1 \sin \omega t + A_2 \cos \omega t$$

$$A_1 = \frac{v_0}{\omega}, A_2 = x_0$$

$$v(t=0) \equiv v_0, x(t=0) \equiv x_0$$

Drgania harmoniczne proste

Okresem T ruchu harmonicznego prostego nazywamy czas, po upływie którego ciało wróci do położenia początkowego:

$$\omega(t + T) + \varphi = (\omega t + \varphi) + 2\pi$$

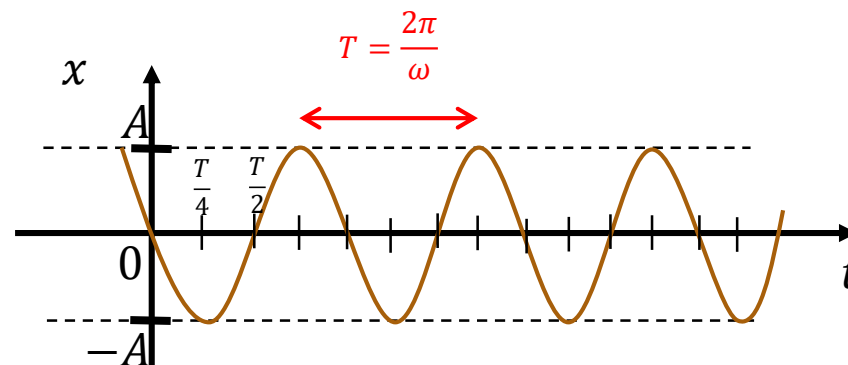


$$T = \frac{2\pi}{\omega} [s]$$

Częstotliwość ν ruchu harmonicznego prostego to liczba okresów w jednostce czasu:

$$f = \frac{1}{T} [Hz]$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$



$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Mechaniczne drgania harmoniczne

$$x = A \cos \omega t$$

Prędkość chwilowa:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = -A\omega \sin \varphi = A\omega \cos \left(\varphi + \frac{\pi}{2} \right)$$

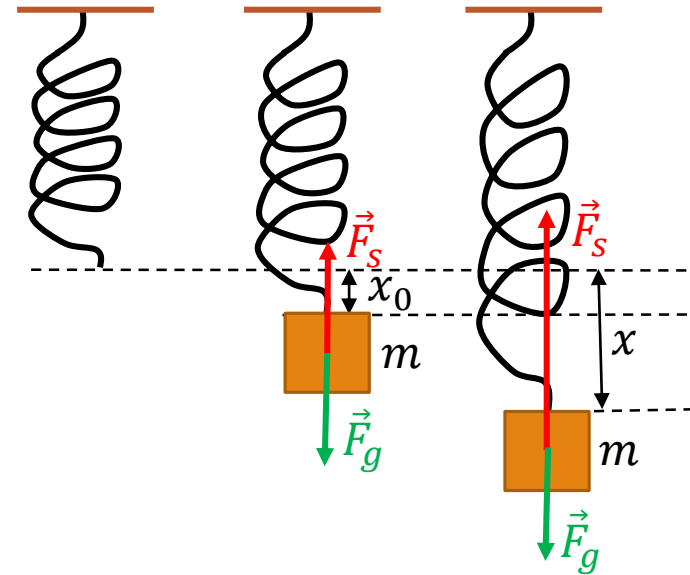
Przyspieszenie chwilowe:

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2 \cos \varphi$$

Siła wywołująca ruch harmoniczny punktu o masie m w kierunku x :

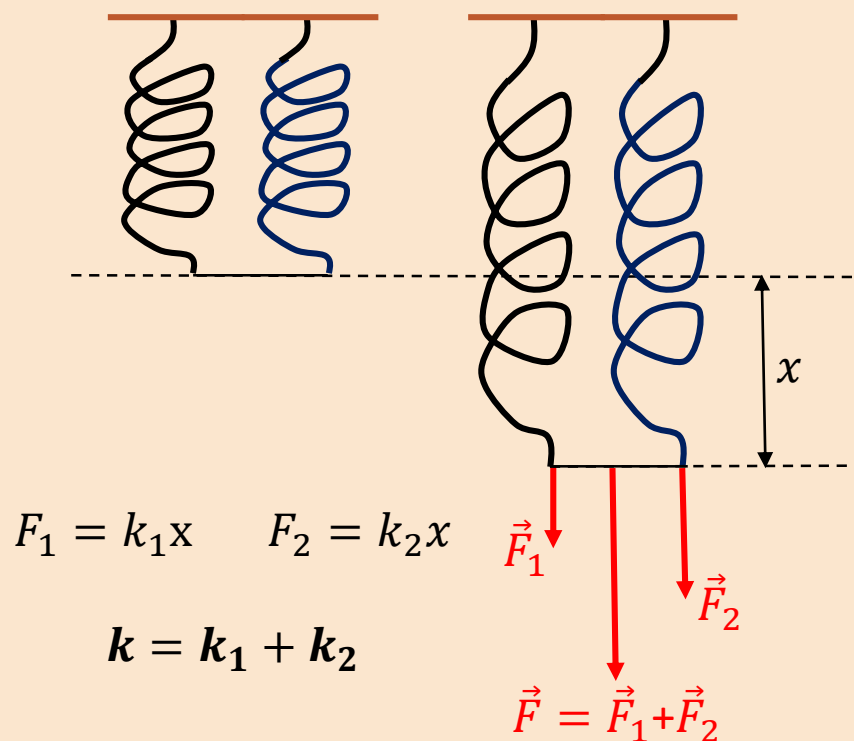
$$\vec{F} = -m\omega^2 x \vec{i}$$

Masa zawieszona na sprężynie: $\vec{F}_s = -k\vec{x}$

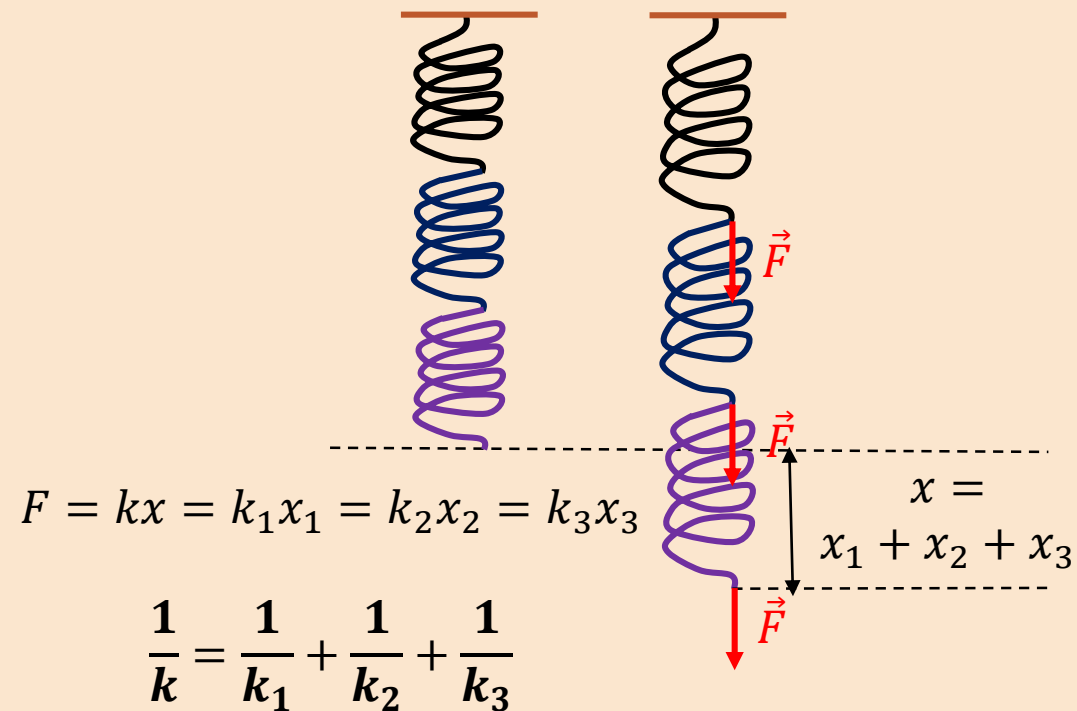


Układy sprężyn

Równoległe połączenie sprężyn



Szeregowe połączenie sprężyn



Energia w ruchu harmonicznym prostym

Energia kinetyczna E_k :

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2} (-A\omega \sin\varphi)^2 = \frac{1}{2} mA^2 \omega^2 \sin^2 \varphi = \\ = \frac{1}{4} mA^2 \omega^2 [1 - \cos(2\varphi)]$$

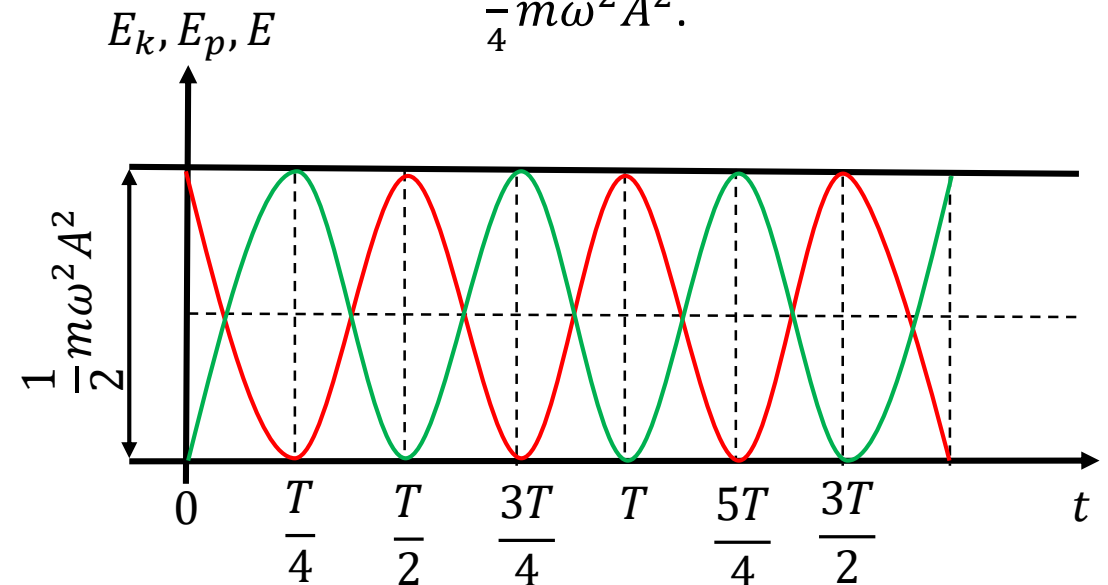
Energia potencjalna E_p :

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{k}{2} (A\cos\varphi)^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \cos^2 \varphi = \\ = \frac{1}{4} m\omega^2 A^2 [1 + \cos(2\varphi)]$$

Energia całkowita: $E = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2$

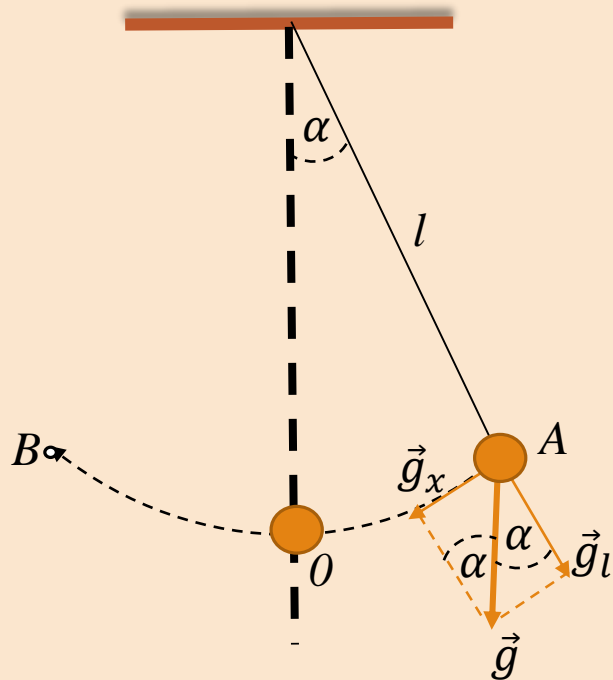
Oscylator harmoniczny jest układem zachowawczym!

Energia potencjalna i energia kinetyczna zmieniają się periodycznie od wartości 0 do $\frac{1}{2} mA^2 \omega^2$. Oscylują harmonicznie z częstością kątową 2ω i amplitudą $\frac{1}{4} m\omega^2 A^2$.



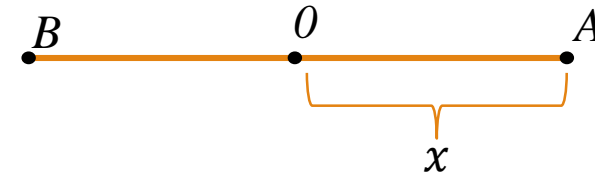
Okres zmian E_k i E_p jest dwa razy mniejszy niż okres drgań!

Mechaniczne drgania harmoniczne: wahadło matematyczne



Ruch wahadłowy dla małych wychyleń (kilka stopni)
jest ruchem harmonicznym prostym!

Dla małych wychyleń tor AOB jest uważany za
prostoliniowy:



$$\vec{g} = \vec{g}_x + \vec{g}_l$$

$$g_x = -g \sin \alpha \approx -g \alpha = -g \frac{x}{l}$$

$$g_x = -\frac{g}{l} x$$

$$x = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\omega^2 = \frac{g}{l} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \longrightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Wahadło matematyczne

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

Okres drgań wahadła matematycznego nie zależy od jego masy!

Okres drgań wahadła matematycznego nie zależy od amplitudy wahań!

$$a_t = l\varepsilon = l \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$

$$l \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -g \sin\alpha$$

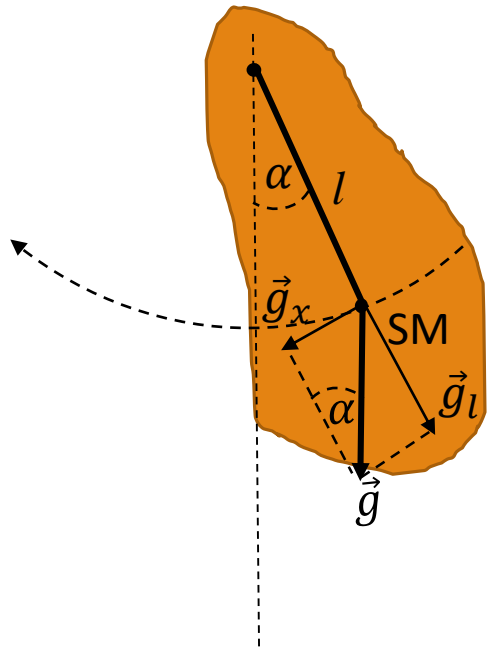
dla małych amplitud:

$$l \frac{d^2\alpha}{dt^2} = -g\alpha$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -\frac{g}{l}\alpha$$

$$\alpha = \alpha_0 \cos(\omega t + \varphi), \quad A = \alpha_0 l$$

Mechaniczne drgania harmoniczne: wahadło fizyczne



SM – środek masy wahadła fizycznego

Dla małych wychyleń:

$$M = -lmg \sin \alpha \approx -lmg \alpha$$

$$M = I \varepsilon = I \frac{d^2 \alpha}{dt^2}$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{lmg}}$$

Drgania harmoniczne złożone. Krzywe Lissajous

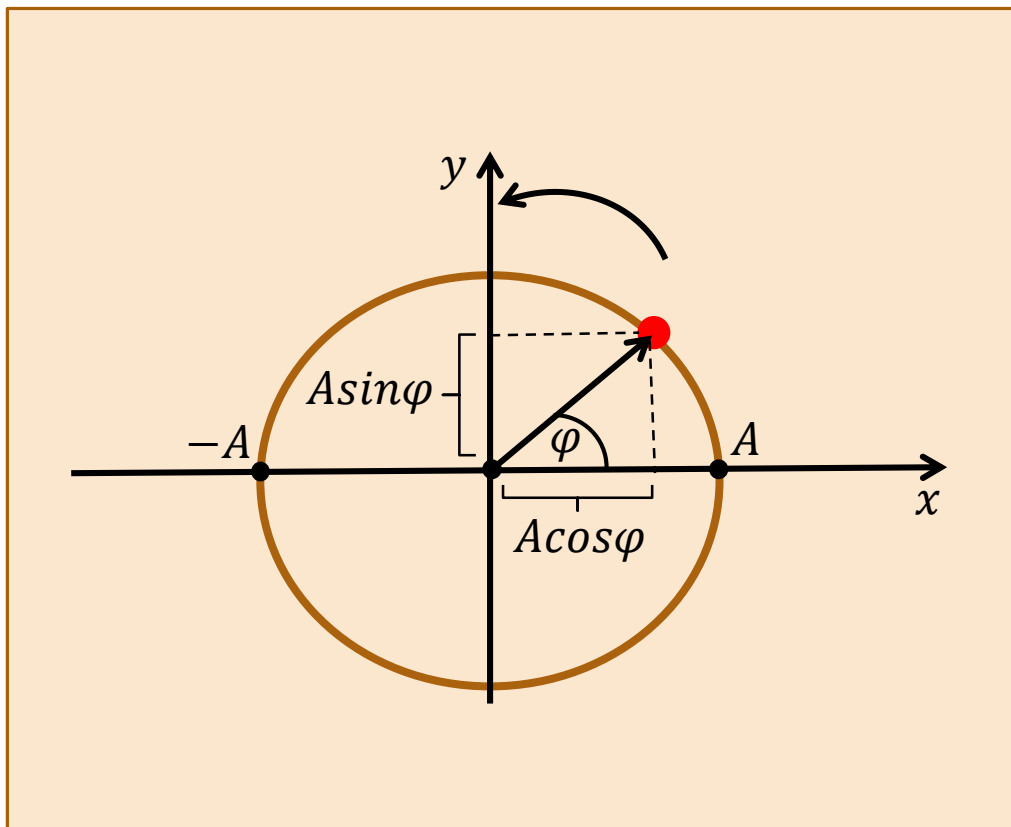
Dwa drgania harmoniczne proste, wzbudzone prostopadle do siebie, o równych amplitudach:

$$A_1 = A_2$$

i okresach:

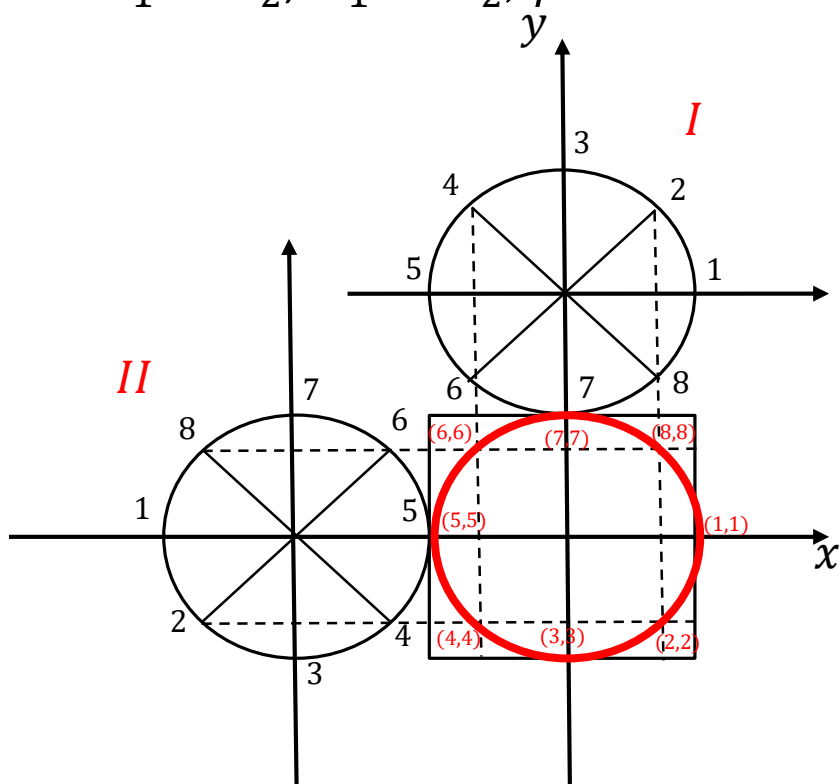
$$T_1 = T_2 \ (\omega_1 = \omega_2),$$

ale o fazie φ różniącej się o 90° składają się na ruch **kołowy** jednostajny.

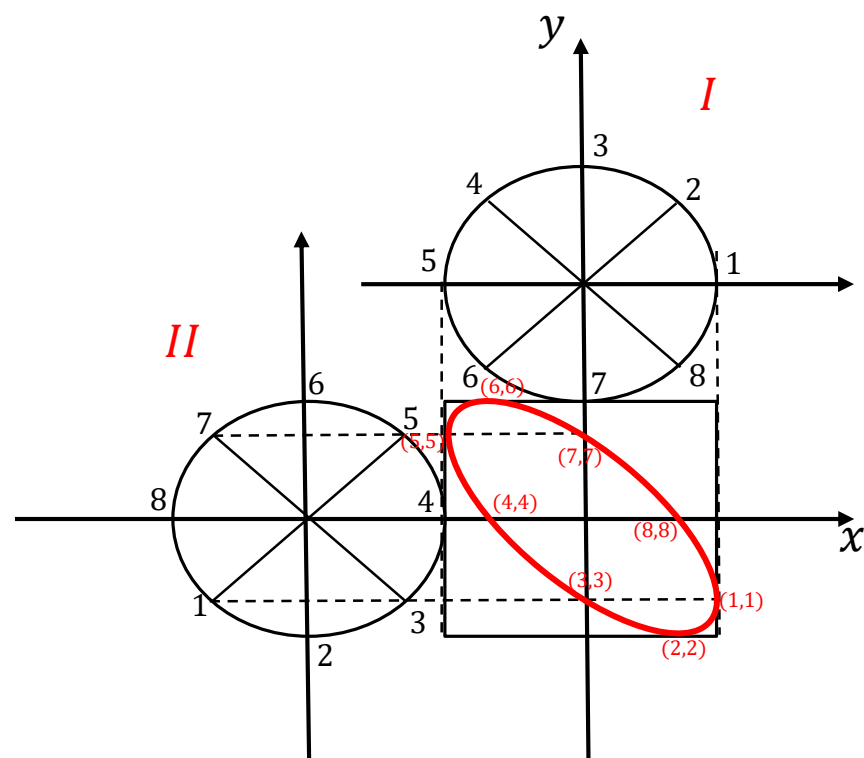


Krzywe Lissajous

$$A_1 = A_2, \omega_1 = \omega_2, \varphi = 90^\circ$$

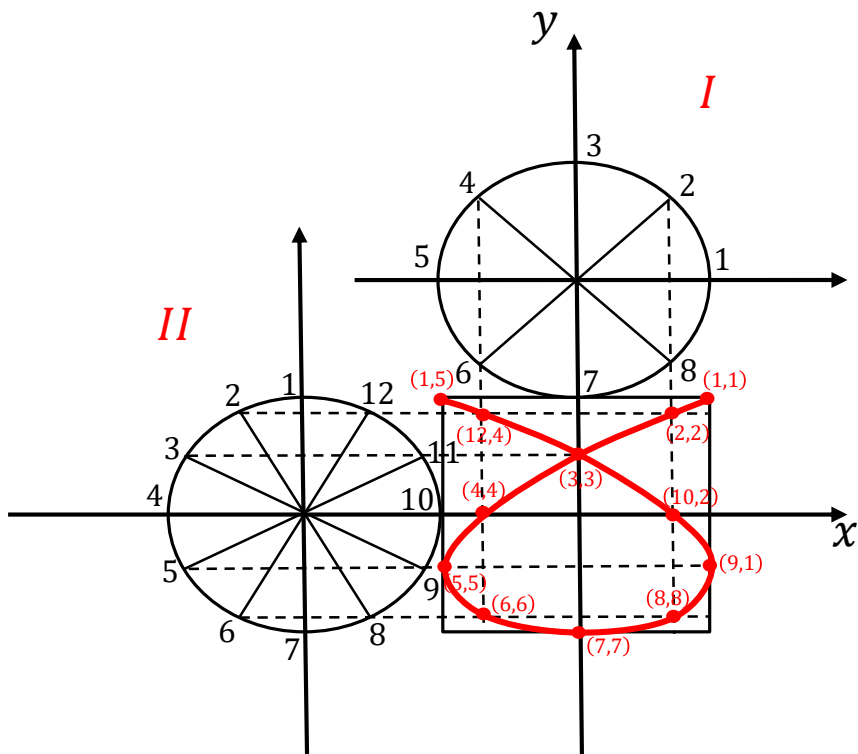


$$A_1 = A_2, \omega_1 = \omega_2, \varphi = 135^\circ$$

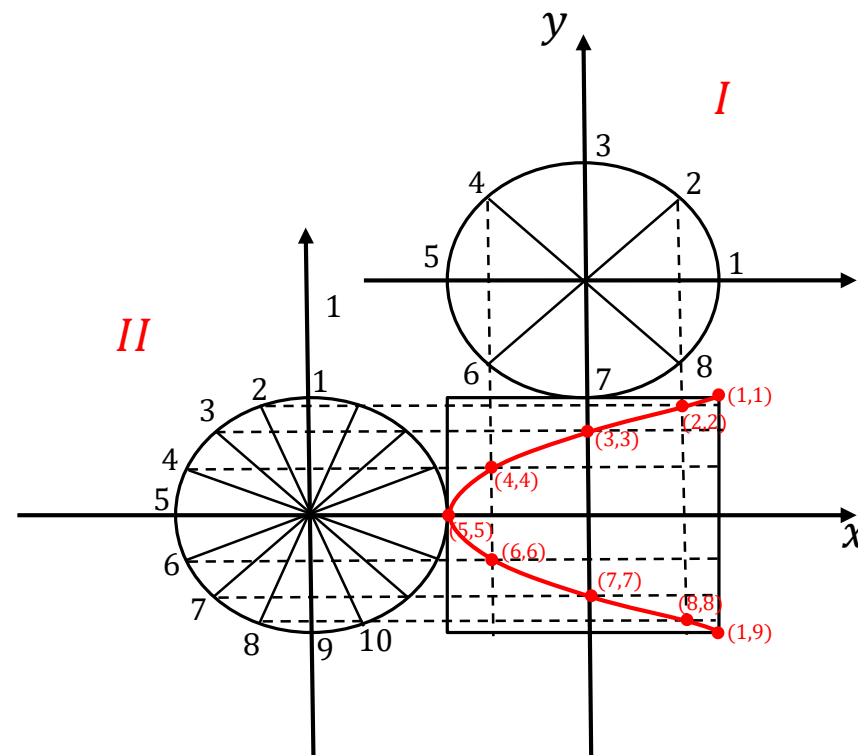


Krzywe Lissajous

$$A_1 = A_2, \omega_1 : \omega_2 = 3 : 2, \varphi = 0^\circ$$



$$A_1 = A_2, \omega_1 : \omega_2 = 2 \ (T_2 = 2T_1), \varphi = 0^\circ$$



Składanie drgań o jednakowej częstotliwości

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Drgania w jednym kierunku dodają się algebraicznie!

$$A \cos(\omega t + \varphi) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$\omega t = c\pi, \quad c = 0, 1, 2, \dots$$

$$A \cos \varphi = A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2 \quad (1)$$

$$\omega t = (c + \frac{1}{2})\pi, \quad c = 0, 1, 2, \dots$$

$$A \sin \varphi = A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2 \quad (2)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

Dla dowolnego t!

$$(1)^2 + (2)^2$$



$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \underbrace{(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_1 \sin \varphi_2)}_{\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Składanie drgań o zbliżonych częstotliwościach. Dudnienia.

Modulacja amplitudy (AM)

$$x_1 = A_1 \cos \omega_1 t$$

$$x_2 = A_2 \cos \omega_2 t$$

$$A_1 = A_2 = A; \quad \omega_1 = \omega - \Delta\omega, \quad \omega_2 = \omega + \Delta\omega$$

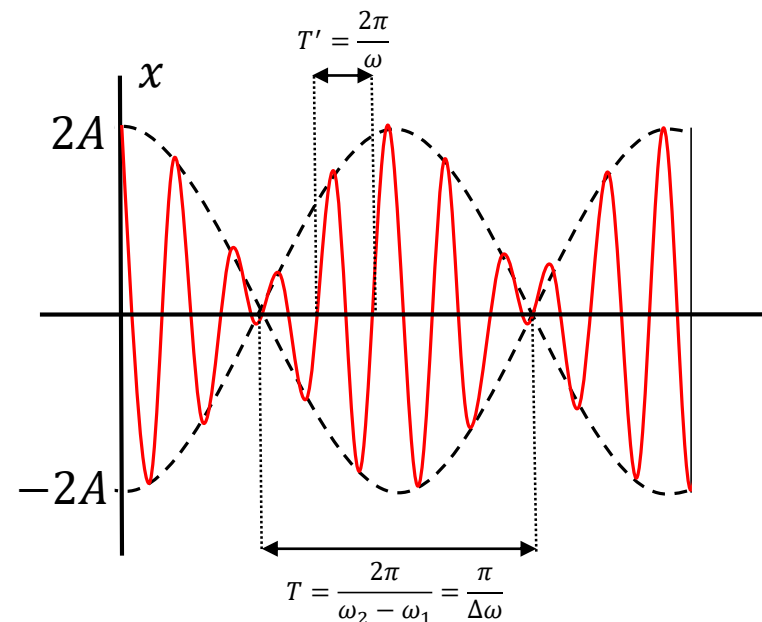
$$\omega_2 - \omega_1 = 2\Delta\omega; \quad \Delta\omega \ll \omega; \quad \omega_1 + \omega_2 = 2\omega$$

$$x = x_1 + x_2 = \underbrace{2A \cos \frac{(\omega_2 - \omega_1)t}{2}}_{\text{"amplituda" zmieniająca się periodycznie z okresem dudnień:}} \cos \frac{(\omega_2 + \omega_1)t}{2}$$

"amplituda" zmieniająca się periodycznie z okresem dudnień:

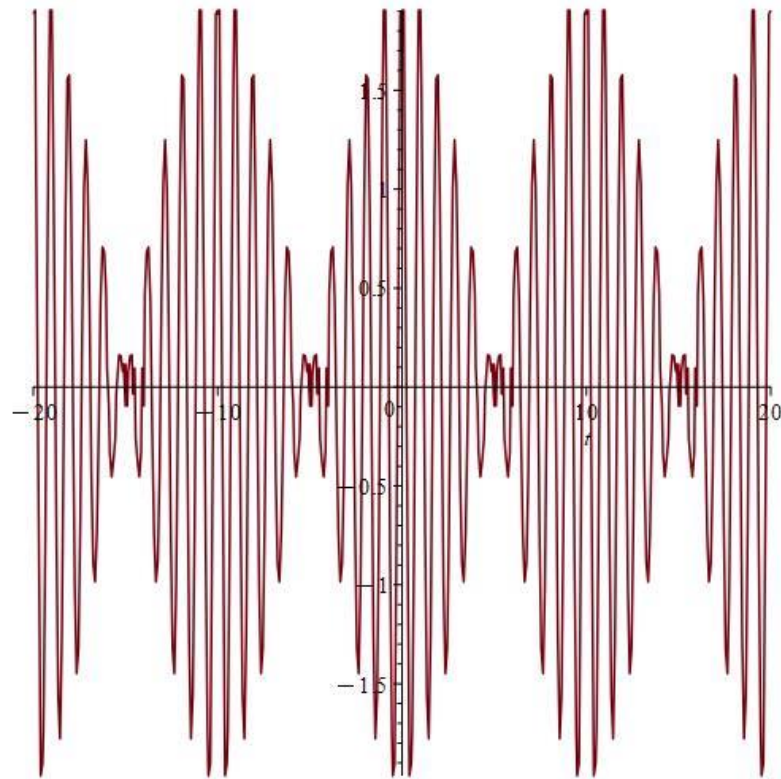
$$T = \frac{2\pi}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{\pi}{\Delta\omega}$$

$$x = 2A \cos(\Delta\omega t) \cos \omega t$$

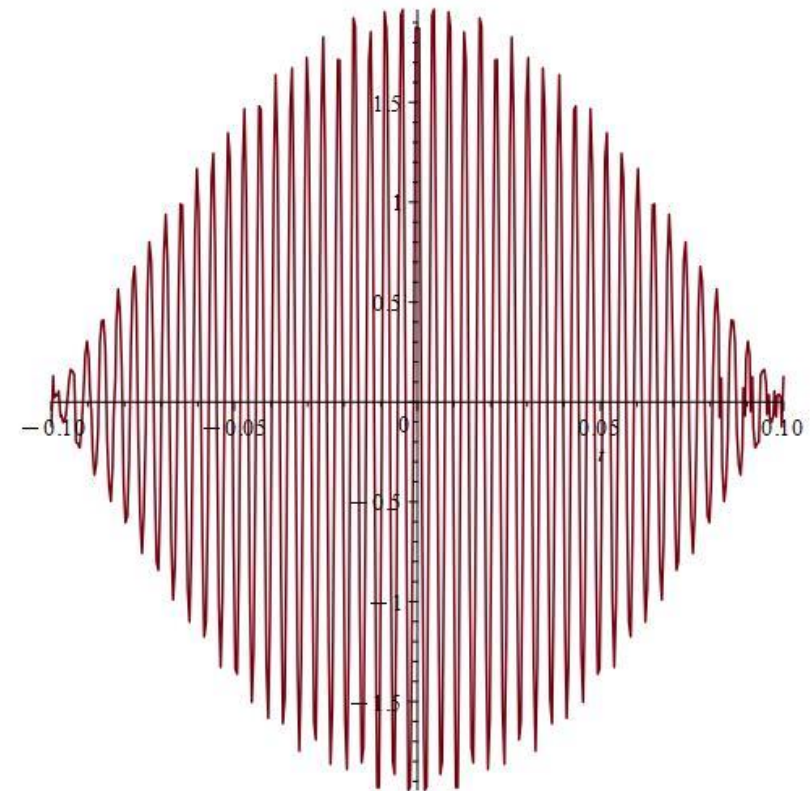


Przykłady

$$\cos(2\pi t) + \cos((1.1)2\pi t)$$



$$\cos(230 \cdot 2\pi t) + \cos(235 \cdot 2\pi t)$$



Rozkład Fouriera

Czy każde drganie można rozłożyć na składowe harmoniczne? Jeżeli tak, to jak tego dokonać?

Jean Baptiste Joseph Fourier (21 marca 1768 Auxerre - 16 maja 1830 Paryż) francuski matematyk wykazał, że **dowolną funkcję periodyczną $f(t)$ z okresem T można rozłożyć na składowe harmoniczne** następująco ($\omega = \frac{2\pi}{T}$):

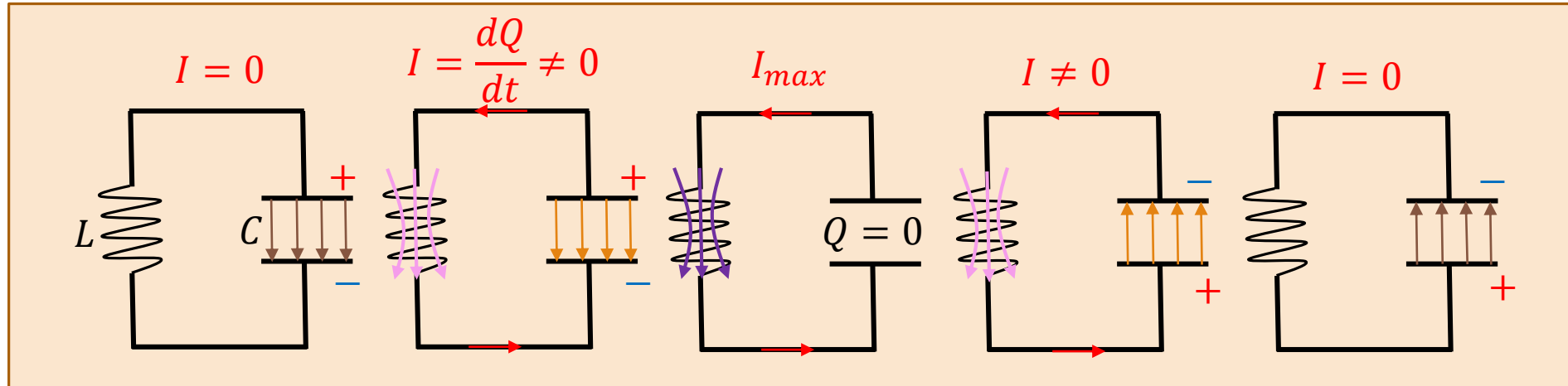
$$f(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \cos(3\omega t + \varphi_3) + \dots$$

Zazwyczaj amplitudy szybko maleją ze wzrostem **rzędu harmonicznej**, co pozwala ograniczyć się do kilku pierwszych wyrazów w **rozkładzie Fouriera**.

Rozkład drgania na sinusoidalne harmoniczne bez uwzględniania ich faz (które wpływają na kształt rozkładanego drgania złożonego, ale nie mają wpływu na energie składowych harmoniczných, która zależy tylko od amplitudy i częstotliwości) nazywa się **rozkładem spektralnym**.

Drgania układu LC

$$R = 0 \quad Q(t = 0) = Q_0 \quad I(t = 0) = 0 \quad E_C(t = 0) = \frac{1}{2} \frac{Q_0^2}{C} \quad E_L(t = 0) = \frac{LI^2}{2} = 0$$



$$U_L + U_C = 0$$

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{Q}{C} = L \frac{d^2Q}{dt^2} + \frac{Q}{C} = 0$$

Drgania układu LC i masa zawieszona na sprężynie

Równanie drgań w obwodzie LC (postać analogiczna do równania drgań swobodnych masy zawieszona na sprężynie):

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C}$$

Wielkości elektryczne	Wielkości mechaniczne
Ładunek Q	Wychylenie x
Indukcyjność L	Masa m
Pojemność C	Odwr. współczynnika sprężystości $\frac{1}{k}$
Natężenie prądu I	Prędkość v

Obwód LC	Masa zawieszona na sprężynie
$L \frac{d^2 Q}{dt^2} = -\frac{Q}{C}$	$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx$
$Q = Q_0 \cos(\omega t)$	$x = A \cos(\omega t)$
$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$	$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$
$I = \frac{dQ}{dt} = -\overbrace{\omega Q_0}^{I_0} \sin(\omega t)$	$v = \frac{dx}{dt} = -\omega A \sin(\omega t)$

Drgania swobodne i tłumione

Układ drgający wykonuje **drgania własne** (swobodne) po wyprowadzeniu go z położenia równowagi, a następnie pozostawieniu pod działaniem wyłącznie sił wewnętrznych.

Stopniowe zmniejszanie się amplitudy drgań wraz z upływem czasu nazywa się **tłumieniem**.

Drgania swobodne układów rzeczywistych są zawsze **drganiami tłumionymi**.

Tłumienie spowodowane jest głównie tarciem oraz wzbudzeniem fal sprężystych w otaczającym ośrodku, a w układach elektrycznych z wydzielaniem się ciepła.

Jeżeli w danym procesie parametry charakteryzujące własności fizyczne układu drgającego nie zmieniają się w czasie trwania tego procesu to układ nazywa się **układem liniowym**.

Dla układu liniowego równanie różniczkowe **tłumionych drgań swobodnych** ma następującą postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

x – wielkość fizyczna zmieniająca się w czasie drgań

$\beta = \text{const} > 0$ – współczynnik tłumienia

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – częstość kołowa nietłumionych drgań swobodnych

Jest to równanie różniczkowe liniowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach

Tłumione drgania swobodne

W wyniku podstawienia:

$$x = e^{rt}$$

otrzymujemy równanie charakterystyczne:

$$r^2 + 2\beta r + \omega_0^2 = 0$$

o pierwiastkach:

$$r_{1,2} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$$

dla przypadku małego tłumienia:

$$\beta < \omega_0$$

$$r_{1,2} = -\beta \pm i \underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}_{\omega}$$

$$r_{1,2} = -\beta \pm i\omega$$
$$x = C_1 e^{(-\beta + i\omega)t} + C_2 e^{(-\beta - i\omega)t}$$

$$x = e^{-\beta t} [C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}]$$

$$x^* = x \longrightarrow C_1^* = C_2, C_2^* = C_1$$

$$\text{niech: } C_1 = \frac{A_0}{2} e^{i\varphi}, C_2 = \frac{A_0}{2} e^{-i\varphi}$$

$$x = e^{-\beta t} \left[\frac{A_0}{2} e^{i\varphi} e^{i\omega t} + \frac{A_0}{2} e^{-i\varphi} e^{-i\omega t} \right]$$

$$x = e^{-\beta t} A_0 \cos(\omega t + \varphi) \text{ lub } x = e^{-\beta t} A_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Dla dużych wartości $\beta > \omega_0$ ruch oscylacyjny zanika.

Tłumione drgania swobodne

Przykład: wahadło sprężynowe o masie m

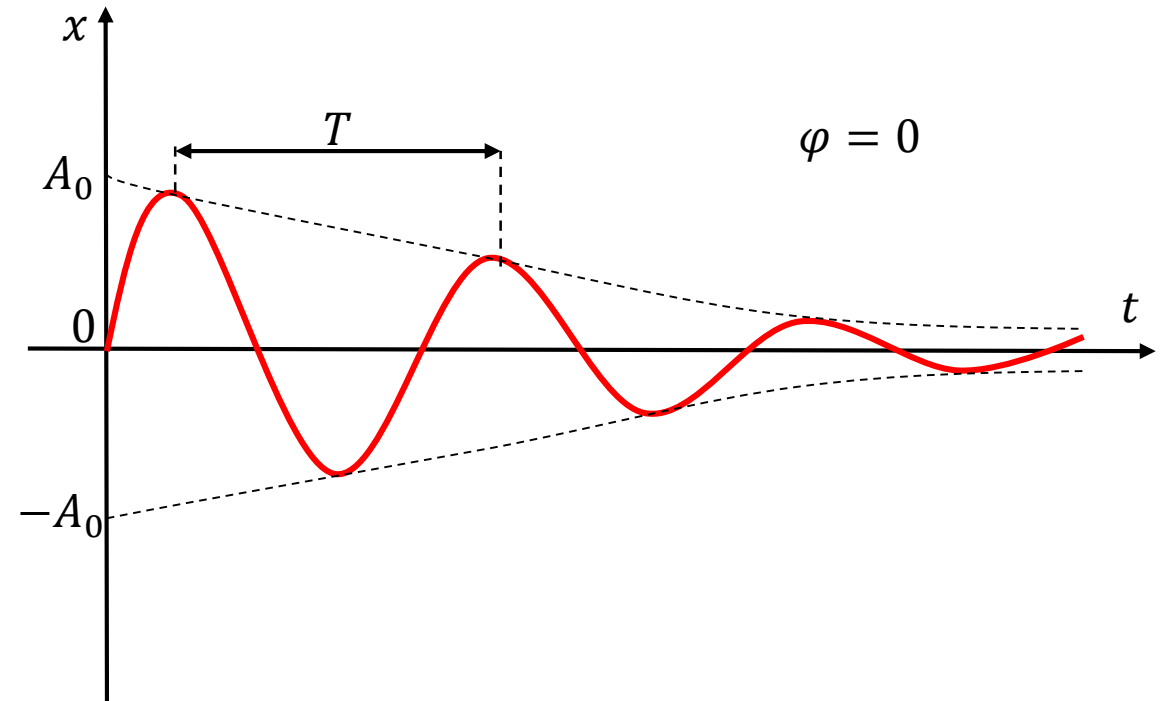
(siła oporu: $\vec{F} = -b\vec{v}$)

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0; \quad \beta = \frac{b}{2m}, \quad k = m\omega_0^2$$

Jeżeli tłumienie nie jest zbyt duże $\beta < \sqrt{\frac{k}{m}} = \omega_0$:

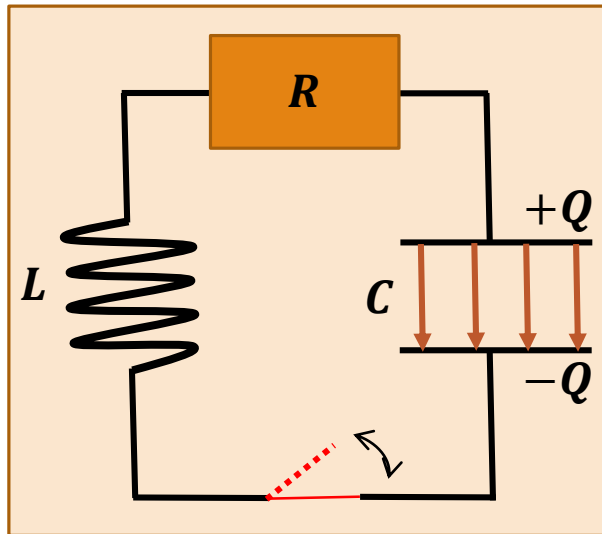
$$x(t) = \underbrace{\widetilde{A_0}}_{\substack{\text{amplituda} \\ \text{początkowa} \\ \text{drgań tłumionych}}} e^{-\beta t} \sin(\omega t + \varphi);$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$



Drgania układu RLC

Szeregowy obwód RLC



$$U_R = RI$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

$$U_R + U_L + U_C = 0 \quad L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = 0$$

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = 0$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} I = 0$$

Równanie różniczkowe tłumionych drgań swobodnych:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{\tilde{R}}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{\tilde{1}}{LC} I = 0$$

2β ω_0^2

$$\beta < \omega_0 \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}$$

$$I = I_0 e^{-\beta t} \sin(\omega t)$$

Mechaniczne drgania wymuszone

Dla układu liniowego równanie różniczkowe **drgań wymuszonych** ma następującą postać:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \frac{1}{m} F_x(t) \quad (1)$$

$F_x(t)$ — zmienna siła zewnętrzna wymuszająca w układzie drganie

Jest to niejednorodne równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach.

Niech siła wymuszająca zmienia się w sposób harmoniczny:

$$F_x(t) = F_0 \cos(\Omega t)$$

Ω — częstość kołowa siły wymuszającej

Pod wpływem siły $F_x(t)$ wahadło sprężynowe wykonuje jednocześnie swobodne drgania tłumione oraz okresowe drgania nietłumione o częstości Ω .

Po pewnym czasie swobodne drgania tłumione wahadła znikają, a wahadło wykonuje już tylko drgania o częstości Ω .

Mechaniczne drgania wymuszone

Z doświadczenia wiadomo, że wahadło sprężynowe pod wpływem siły wymuszającej o częstości kołowej Ω wykonuje drgania harmoniczne z częstością Ω .

Po wstawieniu $x = A \cos(\Omega t)$ do równania (1), założeniu dużej dobroci układu ($\beta = 0$) oraz przyjęciu $\varphi = 0$:

$$A = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \Omega^2)}$$

Ponieważ $A > 0$ to $\Omega < \omega_0$

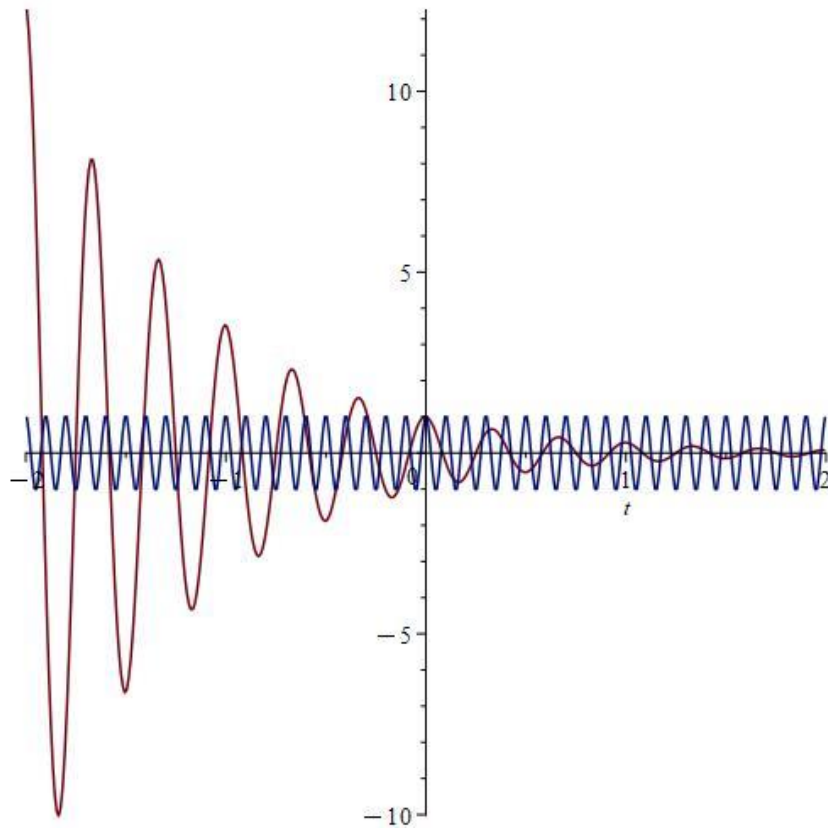
Dla $\omega_0 < \Omega$ drgania zachodzą w przeciwfazie z drganiami siły wymuszającej ($\varphi = \pi$).

Dla $\beta \neq 0$ otrzymujemy:

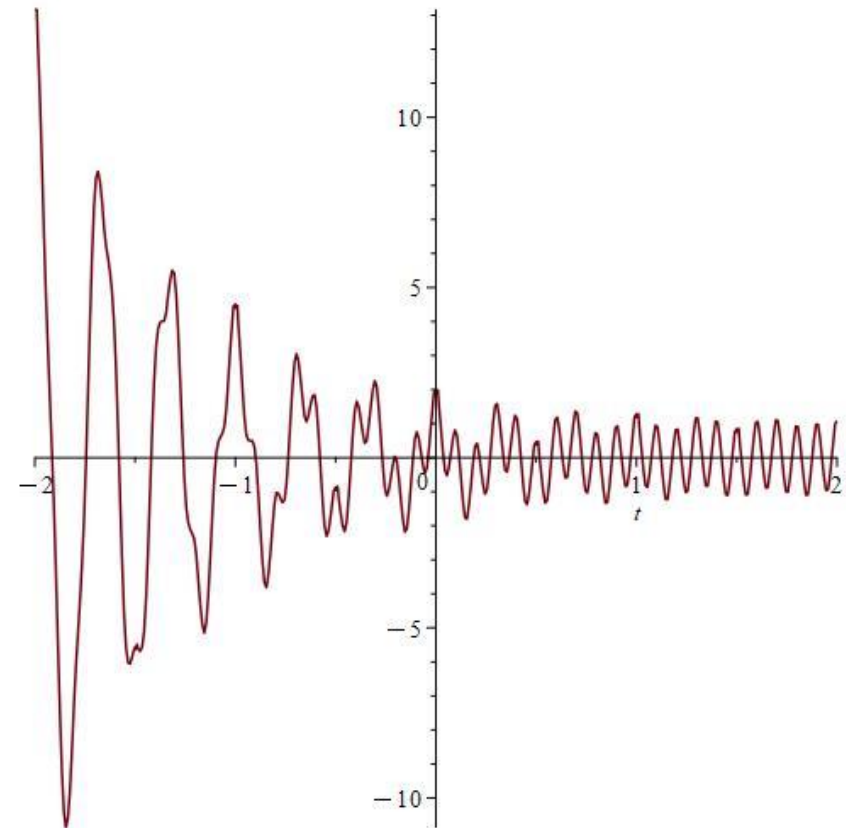
$$x = A \cos(\Omega t - \varphi), \quad A = \frac{F_0}{m \underbrace{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}_{\rho}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

$$x(t) = C \exp(-\beta t) \cos(\omega t + \alpha) + \frac{F_0}{m\rho} \cos(\Omega t - \varphi)$$

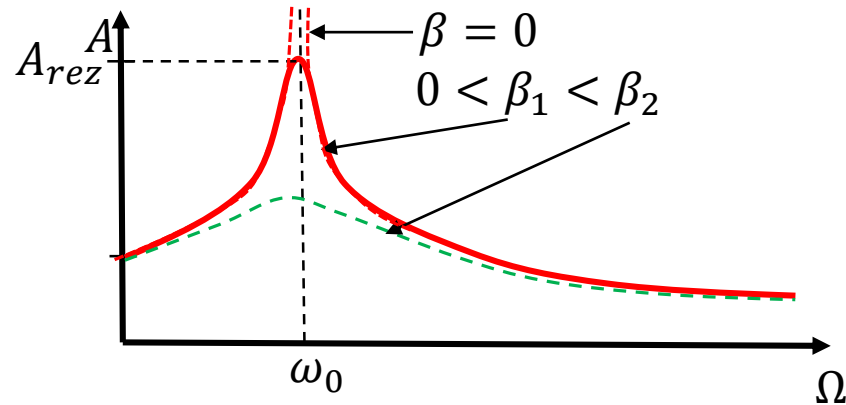
$$\exp(-(0.2)2\pi t) \cos(3 \cdot 2\pi t), \cos(10 \cdot 2\pi t)$$



$$\exp(-(0.2)2\pi t) \cos(3 \cdot 2\pi t) + \cos(10 \cdot 2\pi t)$$



Rezonans

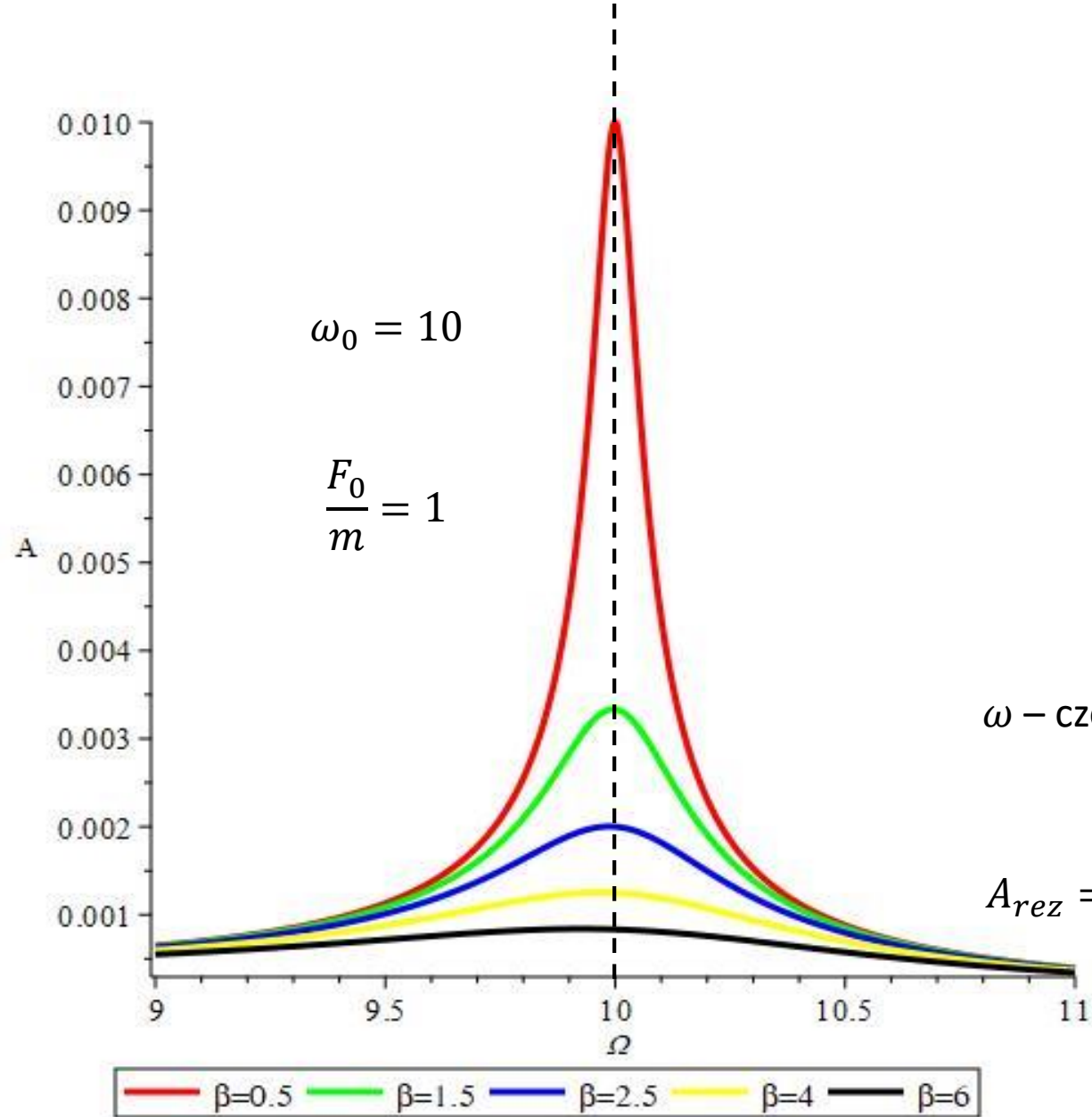


Im większa dobroć układu D tym ostrzejszy „pik rezonansowy”.

Rezonans w układzie o dużej dobroci może doprowadzić do zniszczenia układu.

Wraz ze wzrostem dobroci układu zmniejsza się szerokość połówkowa krzywej rezonansowej.

Wraz ze wzrostem tłumienia amplituda rezonansowa A_{rez} i częstość rezonansowa Ω_{rez} zmniejszają się (na rysunku maksimum przesuwają się na lewo!!!)



$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$$\frac{dA}{d\Omega} = 0$$

$$4(\Omega^2 - \omega_0^2)\Omega + 8\beta^2\Omega = 0$$

$$\Omega_{rez} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$$

ω – częstość kołowa swobodnych drgań tłumionych wahadła

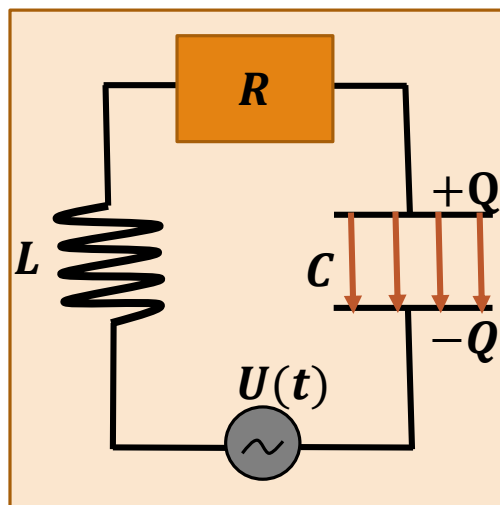
$$A_{rez} = \frac{F_0}{m \sqrt{(\omega_0^2 - (\omega_0^2 - 2\beta^2))^2 + 4\beta^2(\omega_0^2 - 2\beta^2)}}$$

$$A_{rez} = \frac{F_0}{m 2\beta \omega}$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$$

Drgania układu RLC w obecności SEM

Szeregowy obwód RLC



$$U_R = RI$$

$$U_L = L \frac{dI}{dt}$$

$$U_C = \frac{Q}{C}$$

$$U_R + U_L + U_C = U(t)$$

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} = U_0 \cos(\Omega t)$$

$$\frac{d^2 Q}{dt^2} + \frac{\overset{2\beta}{\tilde{R}}}{L} \frac{dQ}{dt} + \frac{\overset{\omega_0^2}{\tilde{1}}}{LC} Q = \frac{U_0}{L} \cos(\Omega t)$$

$$Q = Q_0 \cos(\Omega t - \varphi)$$

$$Q_0 = \frac{U_0}{\Omega \sqrt{R^2 + \left(\Omega L - \frac{1}{\Omega C}\right)^2}} = \frac{U_0}{L \sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\beta^2 \Omega^2}}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{R}{\frac{1}{\Omega C} - \Omega L} = \frac{2\beta \Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

R – oporność czynna obwodu (rezystancja) $\Omega L - \frac{1}{\Omega C}$ – oporność bierna obwodu (reaktancja)
 ΩL – oporność indukcyjna obwodu (induktancja) $\frac{1}{\Omega C}$ – oporność pojemnościowa obwodu (kapacytancja)

Przykłady

Zad. 1.

Masa m wykonuje drgania harmoniczne o częstotliwości $f = 1 \text{ Hz}$. Przechodząc przez położenie równowagi w chwili początkowej masa m poruszała się z prędkością $v = 1 \frac{m}{s}$. Jaką postać ma równanie ruchu masy m ? Jaką drogę przebędzie masa m w ciągu 10 sekund od rozpoczęcia ruchu?

Zad. 2.

Znaleźć okres wahań wahadła matematycznego dla przypadku małych kątów wychylenia z położenia równowagi masy m .

Zad. 3.

Bryła sztywna o masie m wykonuje ruch obrotowy w jednorodnym polu grawitacyjnym wokół poziomej ustalonej osi przechodzącej w odległości l od środka masy bryły. Znaleźć okres wahań takiego wahadła w przypadku małych kątów wychylenia z położenia równowagi.

Zad. 4.

Jaką postać ma równanie ruchu masy m o całkowitej energii E w polu, w którym jej energia potencjalna wynosi $E_p(x) = Cx^2$, gdzie C to dodatnia stała.

Literatura

1. B. M. Jaworski, A. A. Piński, Elementy fizyki tom 1 i 2, PWN, W-wa 1976 (lub nowsze wydania).
2. B. M. Jaworski, A. A. Dietłaf, Fizyka Poradnik encyklopedyczny, PWN, W-wa 1996 (lub nowsze wydania).
3. W. Żakowski, L. Leksiński, Matematyka część IV, WNT, W-wa 1971 (lub nowsze wydania).
4. I. W. Sawieliew, Kurs fizyki tom 1, PWN, W-wa 1987 (lub nowsze wydania).