

# Układy punktów materialnych. Bryła sztywna

---

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

# Punkt materialny

---

**Punkt materialny** to inaczej **masa punktowa** (ciało fizyczne o pewnej masie mające nieskończenie małe rozmiary) czyli przybliżenie, które stosuje się w sytuacjach, w których rozmiary ciała są znacznie mniejsze od rozmiarów innych elementów badanego układu oraz gdy rozmiary i kształt ciała nie mają znaczenia w rozpatrywanym zagadnieniu – przyjmuje się wówczas, że cała masa skupiona jest w punkcie zwanym

**środkiem masy**

badanego układu.

# Układ punktów materialnych

Zbiór punktów materialnych, w którym położenie każdego punktu zależy od położenia pozostałych punktów nazywa się **układem punktów materialnych**.

Układ  $n$  punktów materialnych posiada  $3n$  niezależnych zmiennych potrzebnych do jednoznacznego opisanie stanu układu zwanych **stopniami swobody** (3 stopnie swobody na każdy punkt układu).

Układ punktów swobodnych nie jest ograniczony żadnymi **więzami**.

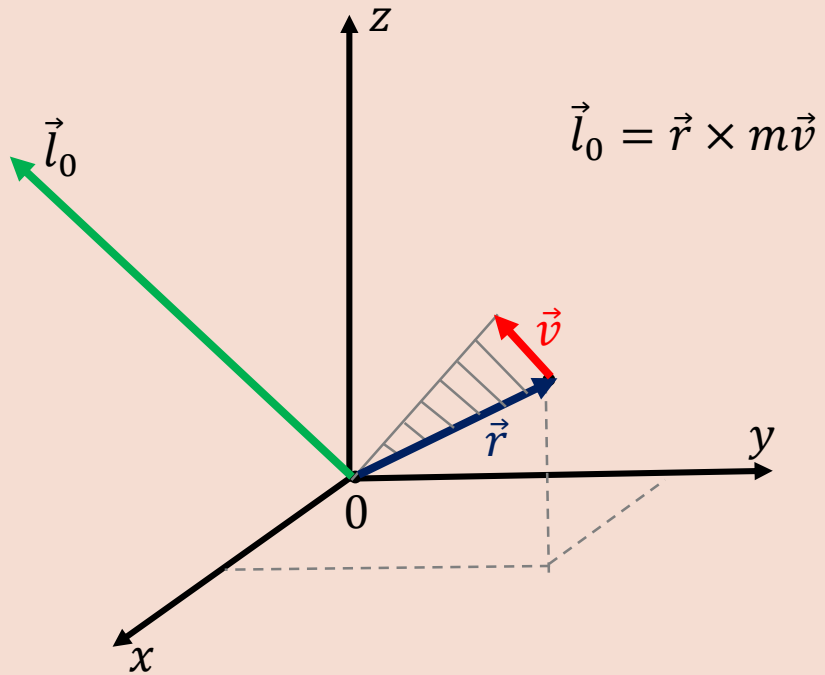
Układ punktów nieswobodnych jest ograniczony nałożonymi na punkty układu więzami.

**Bryła sztywna** to układ punktów materialnych, których wzajemne odległości nie mogą ulec zmianie (rozciągły rozkład masy). Bryła sztywna posiada 6 stopni swobody.

W układzie  $n$  punktów materialnych działają siły pochodzące od wzajemnych oddziaływań punktów układu zwane **siłami wewnętrznymi**  $\vec{F}_{ij}^w$  oraz **siły zewnętrzne**  $\vec{F}_i^z$ , ( $i = 1, 2, 3 \dots, n$ ).

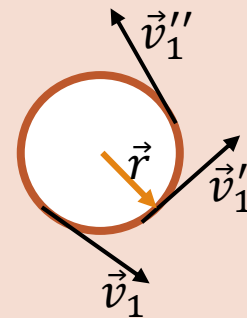
# Moment pędu

Moment pędu  $\vec{l}_0$  względem punktu 0:



$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{m(yv_z - zv_y)}_{l_{0x}} \vec{i} + \underbrace{m(zv_x - xv_z)}_{l_{0y}} \vec{j} + \underbrace{m(xv_y - yv_x)}_{l_{0z}} \vec{k}$$



$$\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 \quad \vec{p}_1' = m\vec{v}_1'$$

$$\vec{l}_{01} = \vec{r} \times \vec{p}_1 = \vec{l}'_{01} = \vec{r} \times \vec{p}_1'$$

# Zasada zachowania momentu pędu

Ruch punktu materialnego pod działaniem siły  $\vec{F}$ :

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \times m\vec{v}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}}_{=\vec{v} \times m\vec{v}=0} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{d(m\vec{v})}{dt}}_{=\frac{d\vec{p}}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0$$

Moment pędu  $\vec{l}_0$  i moment siły  $\vec{M}_0$  określone są względem wspólnego punktu 0.

$$\frac{dl_{0x}}{dt} = M_{0x} \quad \frac{dl_{0y}}{dt} = M_{0y} \quad \frac{dl_{0z}}{dt} = M_{0z}$$

$$\vec{M}_0 = 0:$$



$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = 0$$

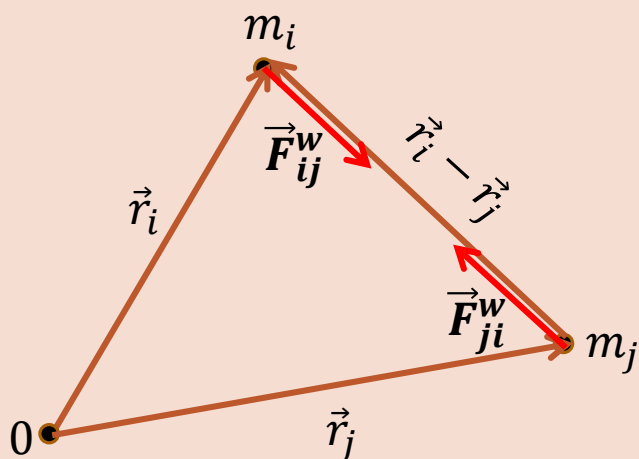


$$\vec{l}_0 = \text{const}$$

# Dynamika układu punktów materialnych

Ruch układu  $n$  punktów materialnych zależy od sił zewnętrznych  $\vec{F}_i^z$  i wewnętrznych  $\vec{F}_{ij}^w$ .

$$\vec{F}_{ij}^w = -\vec{F}_{ji}^w$$



Suma geometryczna wszystkich sił wewnętrznych  $\vec{F}_{ij}^w$  oraz ich momentów względem dowolnego punktu wynosi 0:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}^w = \mathbf{0}$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^w = \mathbf{0}$$

$\vec{r}_i$  – promień punktu o masie  $m_i$  o początku w biegunie 0.

# Dynamika układu punktów materialnych. Środek masy

Punkt określony wektorem wodzącym:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

nazywa się **środkiem masy układu** (ŚM)  
 $n$  punktów materialnych.

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i,$$

$$z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Dla rozkładu ciągłego masy:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm$$

Dynamikę  $i$  – tego punktu materialnego opisuje równanie:

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_i \vec{r}_i) = \vec{F}_i^Z + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}^W$$

Suma  $n$  równań:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} (m_i \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^Z + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}^W}_{=0}$$

# Ruch środka masy

Zakładamy, że masy układu punktów są stałe:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{r}_i) = \frac{d^2}{dt^2} (m \vec{r}_C) = m \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2}$$

$$m \vec{a}_C = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^Z \equiv \vec{F}^Z$$

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} \equiv m \ddot{x}_C = F_x^Z, \quad m \frac{d^2 y_C}{dt^2} \equiv m \ddot{y}_C = F_y^Z, \quad m \frac{d^2 z_C}{dt^2} \equiv m \ddot{z}_C = F_z^Z$$

**Siły wewnętrzne  $\vec{F}_{ij}^w$  nie mają wpływu na ruch środka masy!**

**Ruch środka masy nie zależy od punktu przyłożenia sił zewnętrznych!**

**Środek masy układu punktów materialnych porusza się tak jakby skupiona w nim była cała masa układu i stanowił on punkt przyłożenia każdej siły zewnętrznej  $\vec{F}_i^Z$ .**

**Jeżeli suma geometryczna sił zewnętrznych  $\vec{F}_i^Z$  działających na układ punktów materialnych wynosi zero to jego środek masy nie zmienia swojej prędkości.**

# Zasada zachowania pędu układu punktów materialnych

Własności mechaniczne odosobnionego układu nie ulegają zmianie przy dowolnym równoległym jego przesunięciu w przestrzeni.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{P} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} (m \vec{r}_C) = m \vec{v}_C$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \vec{a}_C = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^Z \equiv \vec{F}^Z$$

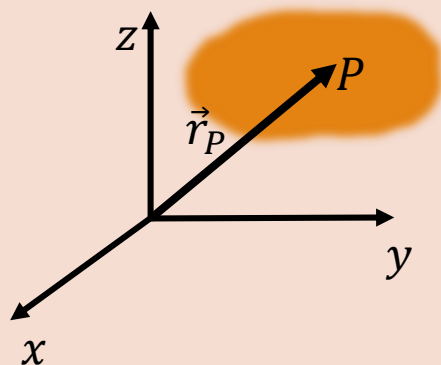
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$$\vec{P} = m \vec{v}_C = \text{const.}$$

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{m} = \frac{\vec{P}}{m}$$

Pęd środka masy  $\vec{P}$  to całkowity pęd układu!

# Moment bezwładności



## Moment bezwładności względem punktu

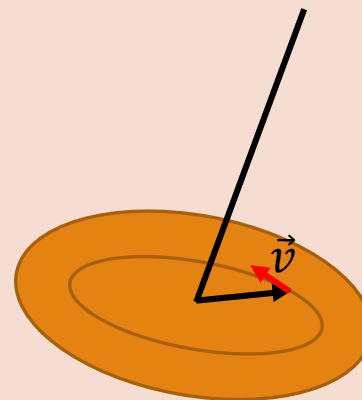
1) dla ciągłego rozkładu masy (np. bryły sztywnej):

$$I = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

2) dla układu  $n$  punktów:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Moment bezwładności pełni analogiczną rolę w dynamice ruchu obrotowego ciała jak masa w dynamice ruchu postępowego!



$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} v^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{r^2 dm}_{\substack{\text{jednostkowy} \\ \text{wkład} \\ \text{do momentu} \\ \text{bezwładności} \\ \text{tarczy}}} \end{aligned}$$

# Moment bezwładności

## Moment bezwładności względem osi

1) dla ciągłego rozkładu masy:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

2) dla układu  $n$  punktów :

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2)$$
$$\vdots$$

## Moment bezwładności względem płaszczyzny

1) dla ciągłego rozkładu masy:

$$I_{xx} = \int x^2 dm$$

$$I_{yy} = \int y^2 dm$$

$$I_{zz} = \int z^2 dm$$

2) dla układu  $n$  punktów :

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$$

$$\vdots$$

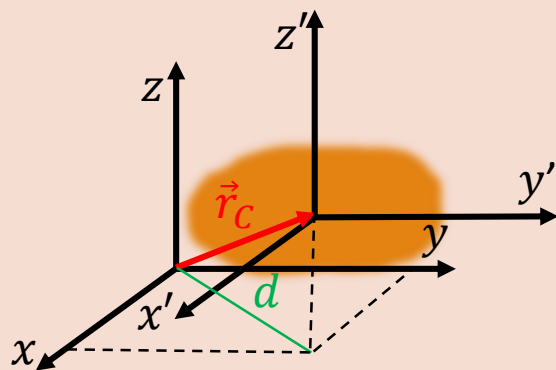
$$I_x = I_{yy} + I_{zz}, I_y = I_{xx} + I_{zz}, I_z = I_{xx} + I_{yy}$$

# Moment bezwładności – Twierdzenie Steinera

$OXYZ$  – układ współrzędnych o środku w punkcie  $O$

$CX'Y'Z'$  – układ współrzędnych o środku w punkcie  $\dot{S}M$

$X \parallel X' \quad Y \parallel Y' \quad Z \parallel Z'$



$$\begin{aligned}x &= x_C + x' \\y &= y_C + y' \\z &= z_C + z'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \int x^2 dm = \int (x_C + x')^2 dm = \\&= x_C^2 \int dm + \underbrace{2x_C \int x' dm}_{=0} + \int x'^2 dm\end{aligned}$$

$$I_{xx} = I_{x'x'} + mx_C^2$$

$\vdots$

$$I_z = I_{xx} + I_{yy} = I_{x'x'} + mx_C^2 + I_{y'y'} + my_C^2$$

$$I_z = I_{z'} + m \underbrace{(x_C^2 + y_C^2)}_{\text{odległość } d \text{ osi } I_z \text{ od osi } I_{z'}}$$

$\vdots$

# Moment pędu układu $n$ punktów materialnych

Moment pędu układu  $n$  punktów materialnych względem **nieruchomego** punktu 0:

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Dla układu punktów materialnych poruszających się z prędkością kątową  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

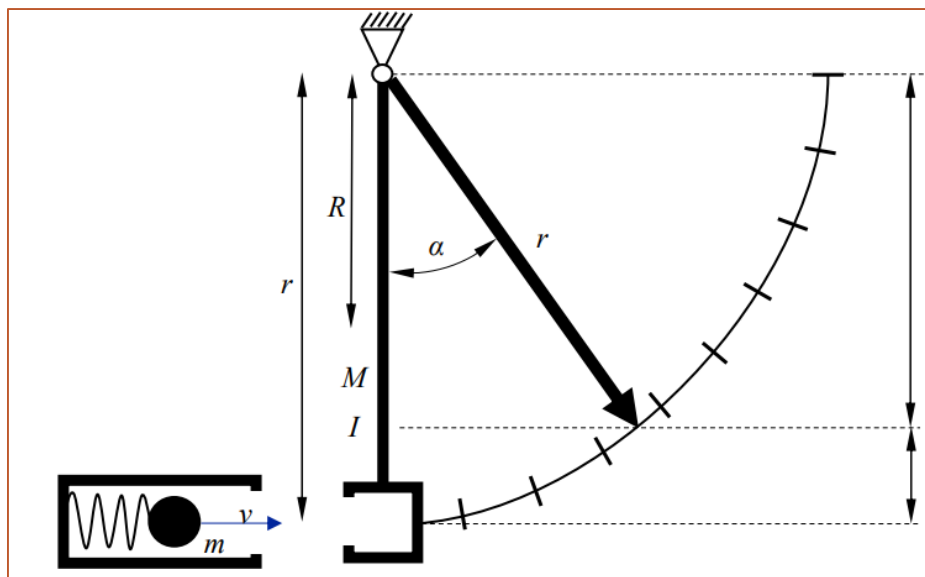
$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n m_i \left[ \vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \vec{r}_i \underbrace{(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})}_{=0 \text{ dla } \vec{r}_i \perp \vec{\omega}} \right]$$

$$\vec{L}_0 = \vec{\omega} \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i r_i^2}_I = I \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0 = I \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\epsilon}}$$

# Zderzenia – wahadło balistyczne

(używając pojęcia momentu bezwładności)



Liczba dodatkowych ciężarków	Zderzenie dosk. niesprężyste		Zderzenie sprężyste	
	$v_0$	$\alpha$	$v_0$	$\alpha$
$n$	[ ]	[ ]	[ ]	[ ]
	$\alpha_1 =$		$\alpha_2 =$	

## 1. Zderzenie sprężyste

Zasada zachowania momentu pędu

$$mvr = I\omega + mrv'$$

Zasada zachowania energii

$$\frac{I\omega^2}{2} = MgR(1 - \cos\alpha_2)$$

## 2. Zderzenie doskonale niesprężyste:

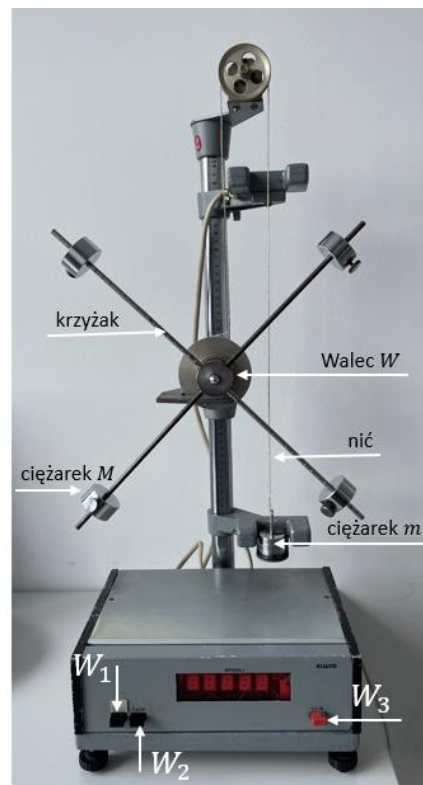
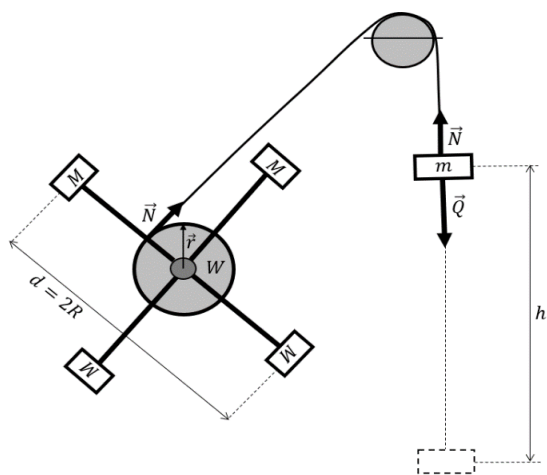
Zasada zachowania momentu pędu

$$mvr = (I + mr^2)\omega$$

Zasada zachowania energii

$$\frac{(I + mr^2)\omega^2}{2} = mgr(1 - \cos\alpha_1) + MgR(1 - \cos\alpha_1)$$

# Wahadło Oberbecka



$$I\vec{\varepsilon} = \vec{r} \times \vec{N}$$

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \vec{N}$$

$$I\varepsilon = rN$$

$$ma = mg - N$$

$$I \frac{2h}{rt^2} = rN$$

$$m \frac{2h}{t^2} = mg - N$$

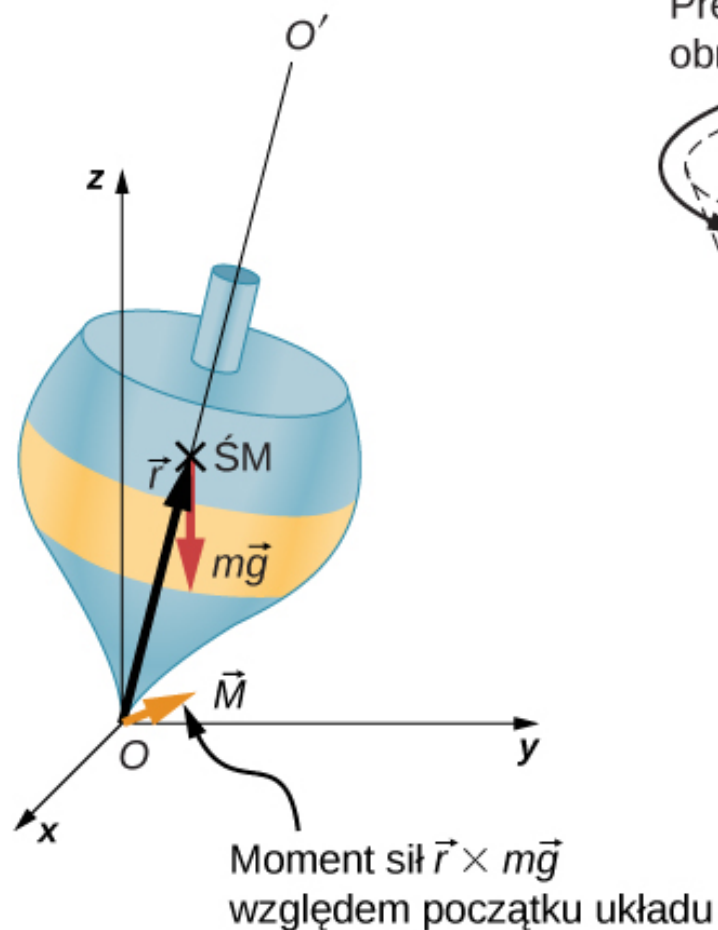
$$t^2 = \frac{2h}{g} + \frac{2h}{mgr^2} I$$

(a)

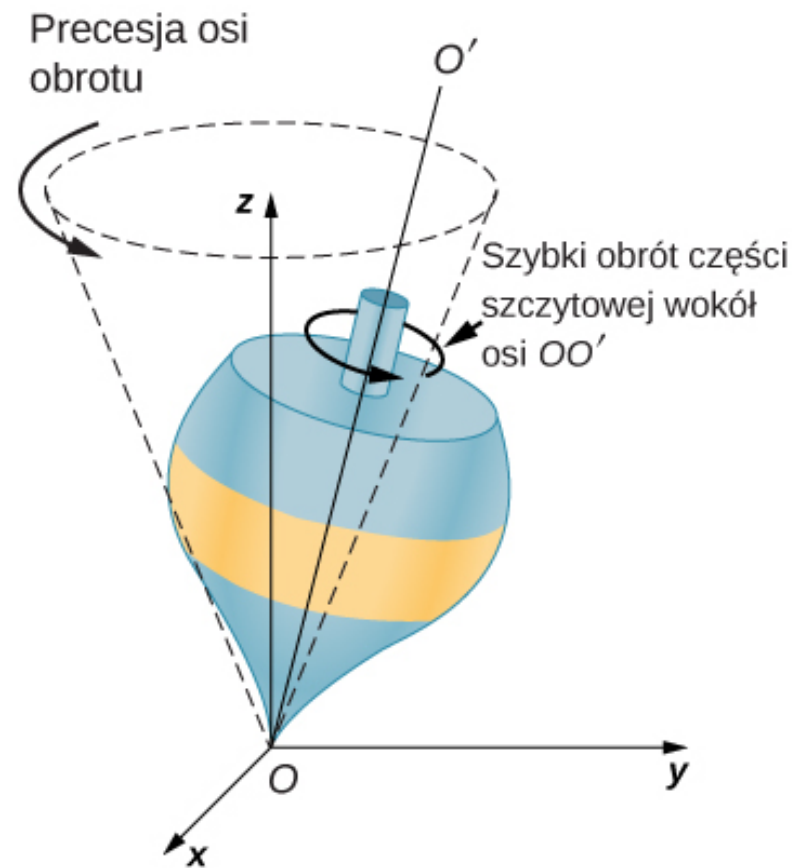
Jeżeli bączek się nie kręci, to moment siły względem punktu podparcia O powoduje jego przewrócenie.

(b)

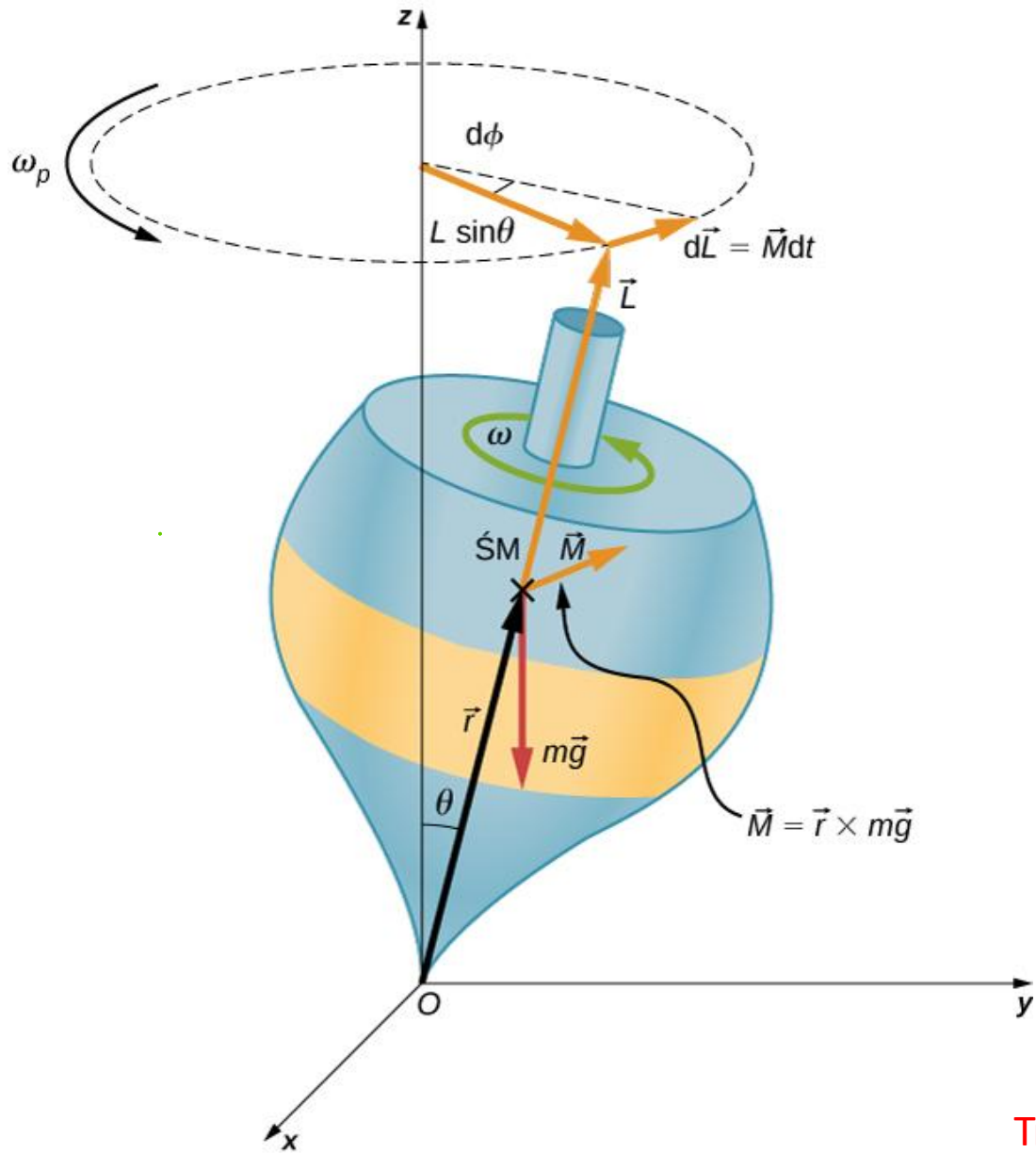
Jeżeli bączek obraca się wokół swojej osi  $OO'$ , to nie przewraca się, ale porusza się ruchem precesyjnym wokół osi  $z$ .



(a)



(b)



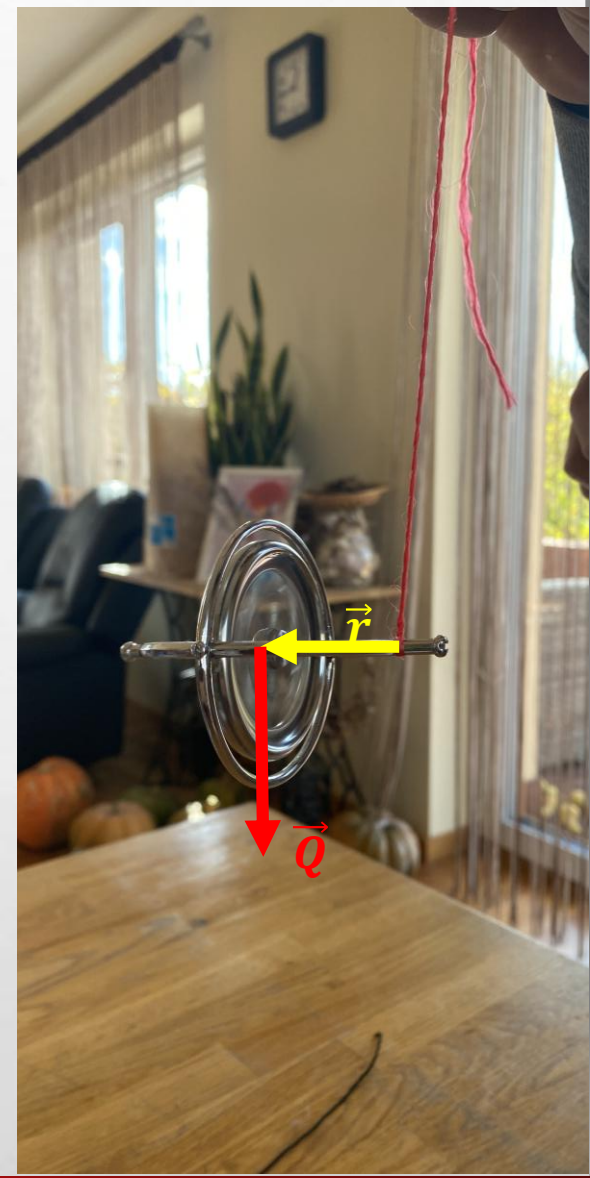
Wypadkowa sił działająca na środek ciężkości wytwarza moment sił  $\vec{M}$  w kierunku prostopadłym do wektora momentu pędu  $\vec{L}$ . Wartość  $\vec{L}$  nie zmienia się, ale kierunek  $\vec{L}$  podlega zmianom, a oś symetrii bączka dokonuje precesji wokół osi  $z$ .

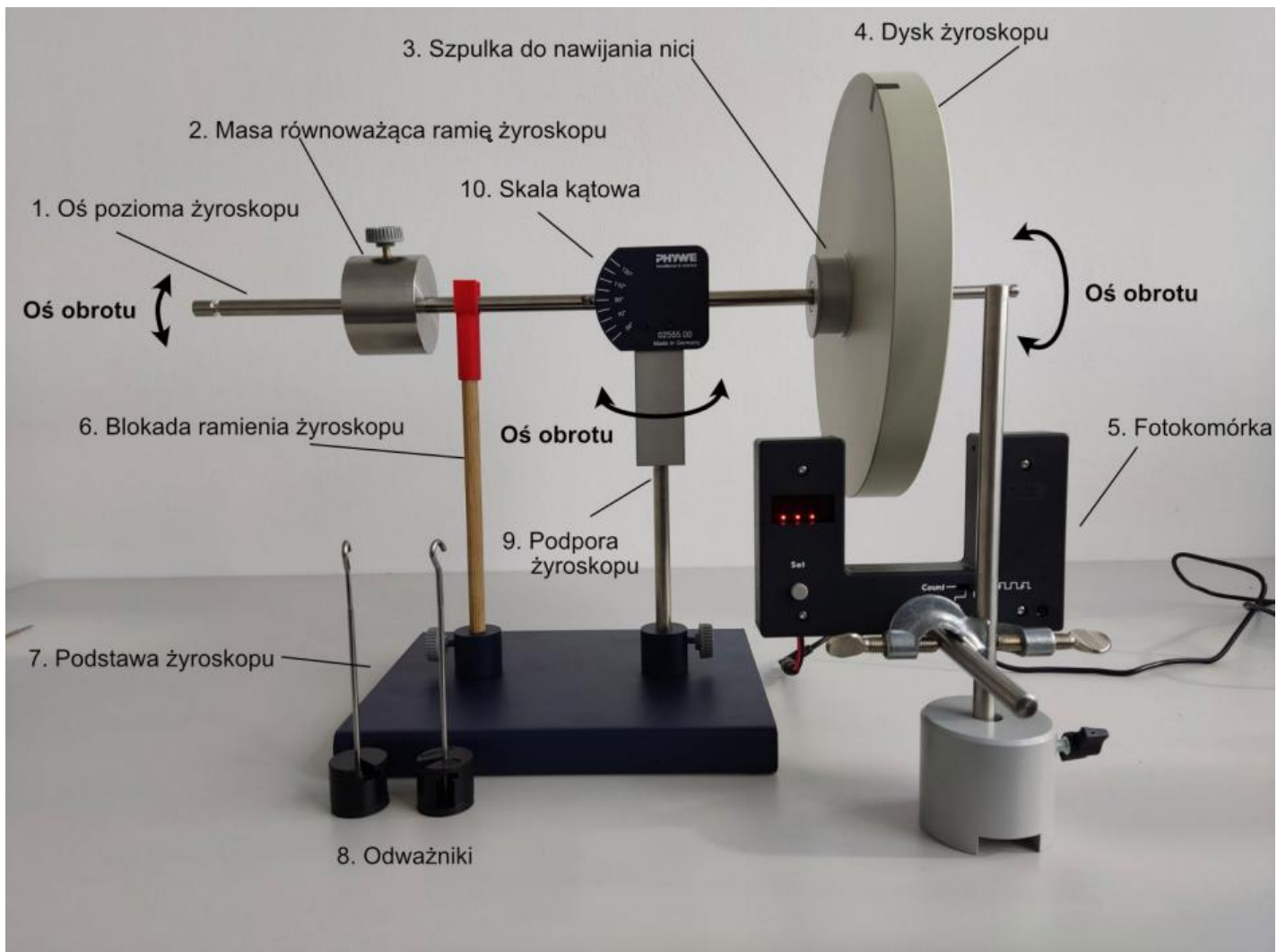
Treści dostępne za darmo na

<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkol-wyzszych-tom-1/pages/11-4-precesja-zyroskopu>





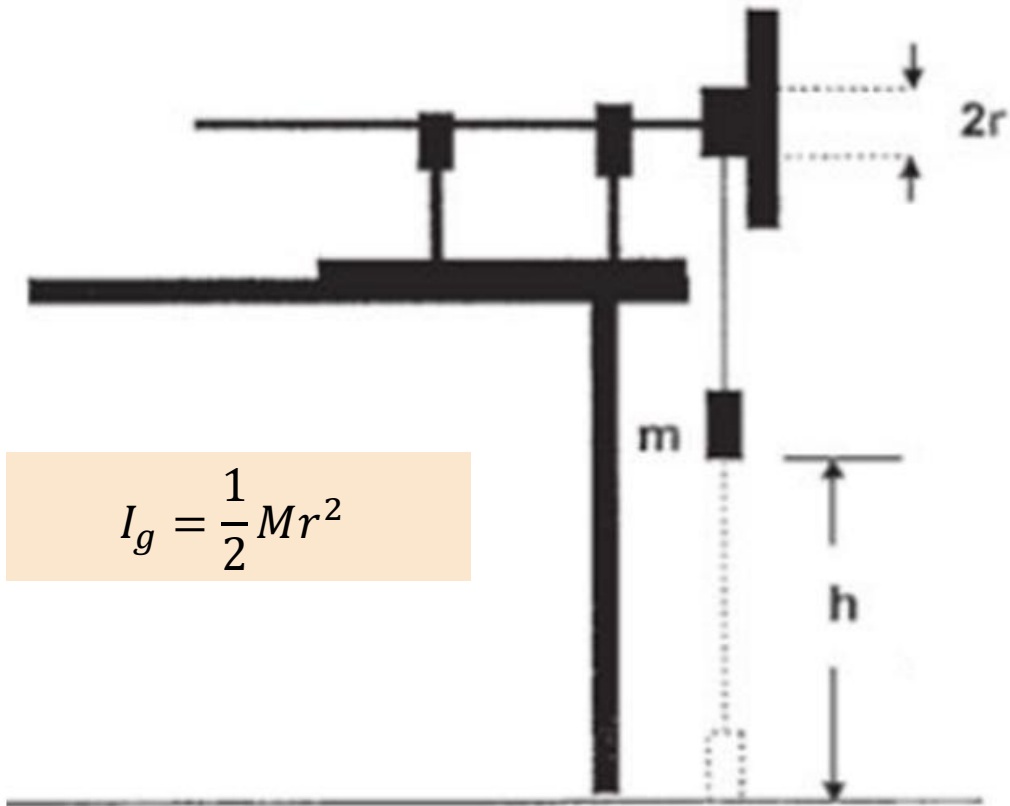




# Żyroskop 3-osiowy

---

# Wyznaczanie momentu bezwładności żyroskopu



$$I_g = \frac{1}{2}Mr^2$$

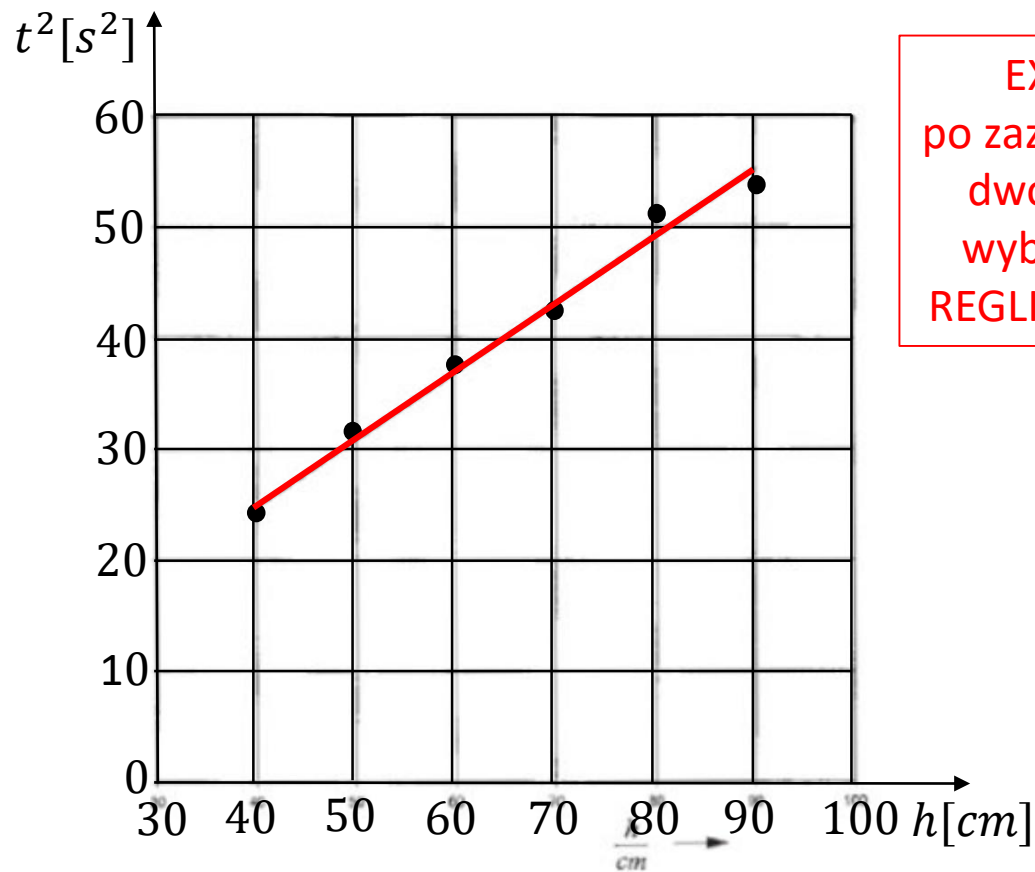
$$I \frac{d\omega_R}{dt} = I\varepsilon = M$$

$$M = Fr \quad F = mg - ma \quad h = \frac{at^2}{2} \quad a = \varepsilon r$$

$$t^2 = \frac{2I + 2mr^2}{mgr^2} h$$

$$t^2 = f(h)$$

# Wyznaczanie momentu bezwładności żyroskopu: regresja liniowa

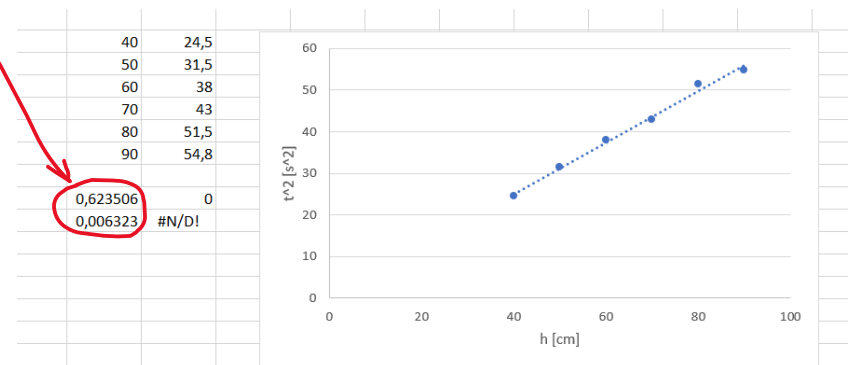


EXCEL:  
po zaznaczeniu  
dwóch pól  
wybieramy  
REGLINP (b=0)

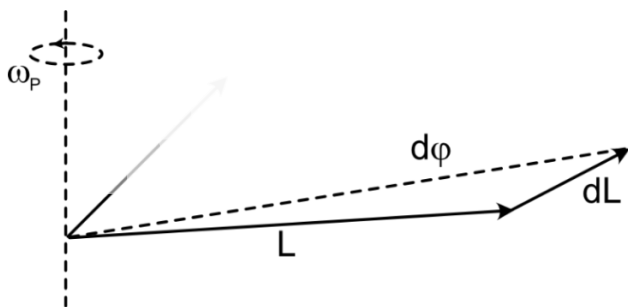
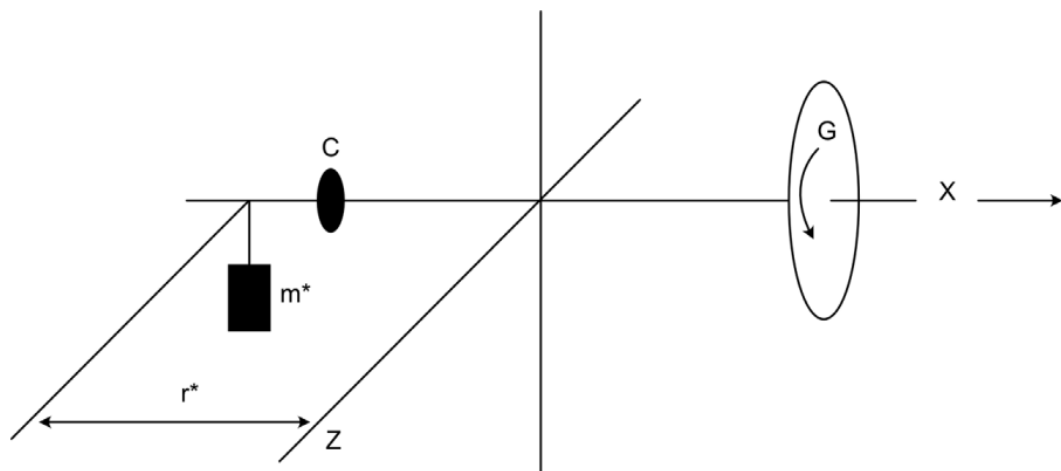
$$t_y^2 = \frac{2I + 2mr^2}{mgr^2} h_x$$

$$y = ax + b \quad b = 0$$

$$I = ?$$



# Wyznaczanie momentu bezwładności żyroskopu



$$L = I\omega_R$$

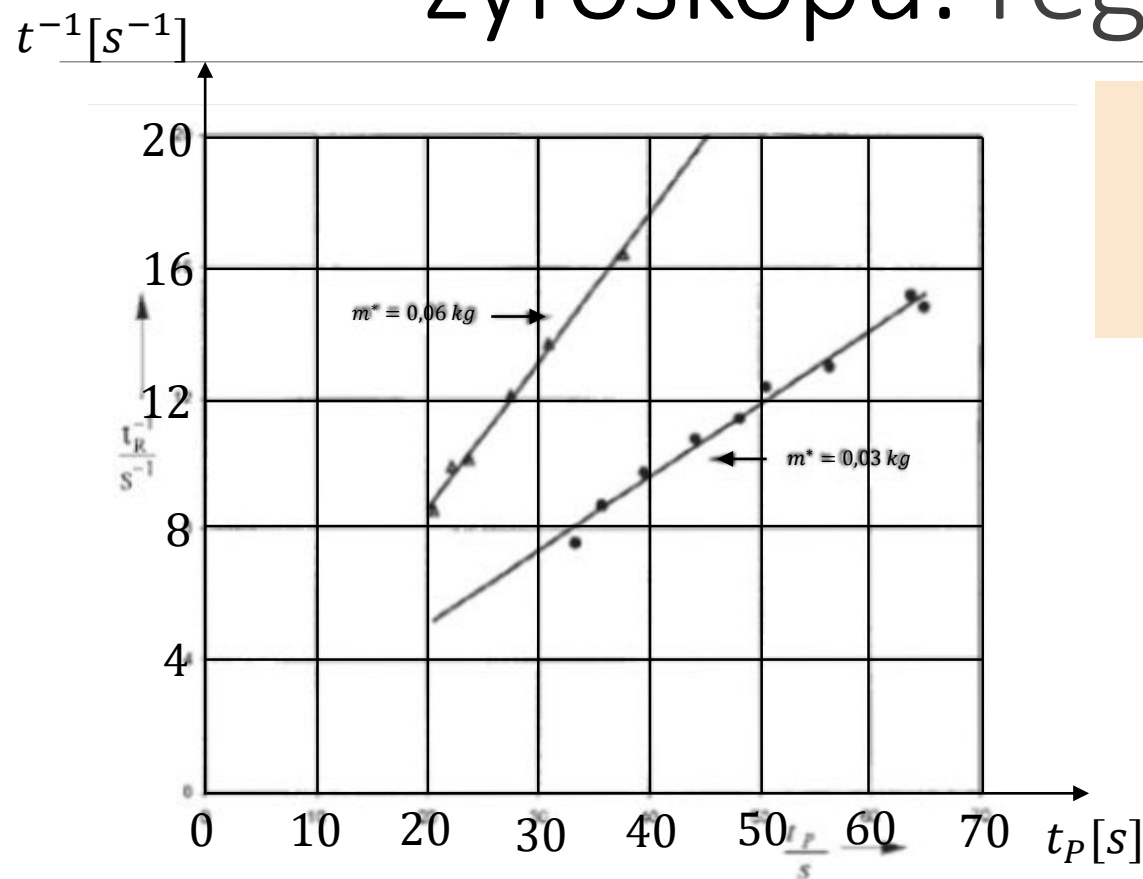
$$M^* = m^*gr^* = \frac{dL}{dt}$$

$$dL = Ld\varphi$$

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{Ldt} = \frac{dL}{I\omega_R dt} = \frac{m^*gr^*}{I\omega_R}$$

$$\frac{1}{t_P} = \frac{m^*gr^*}{4\pi^2 I} \cdot t \quad \text{lub} \quad \frac{1}{t} = \frac{m^*gr^*}{4\pi^2 I} \cdot t_P$$

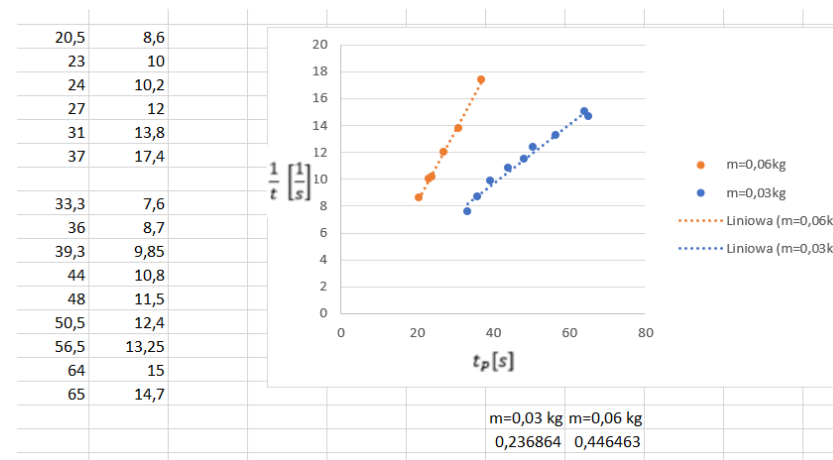
# Wyznaczanie momentu bezwładności żyroskopu: regresja liniowa



$$\underbrace{\frac{1}{t}}_y = \underbrace{\frac{m^* g r^*}{4\pi^2 I}}_a \cdot \underbrace{t_P}_x$$

$$y = ax$$

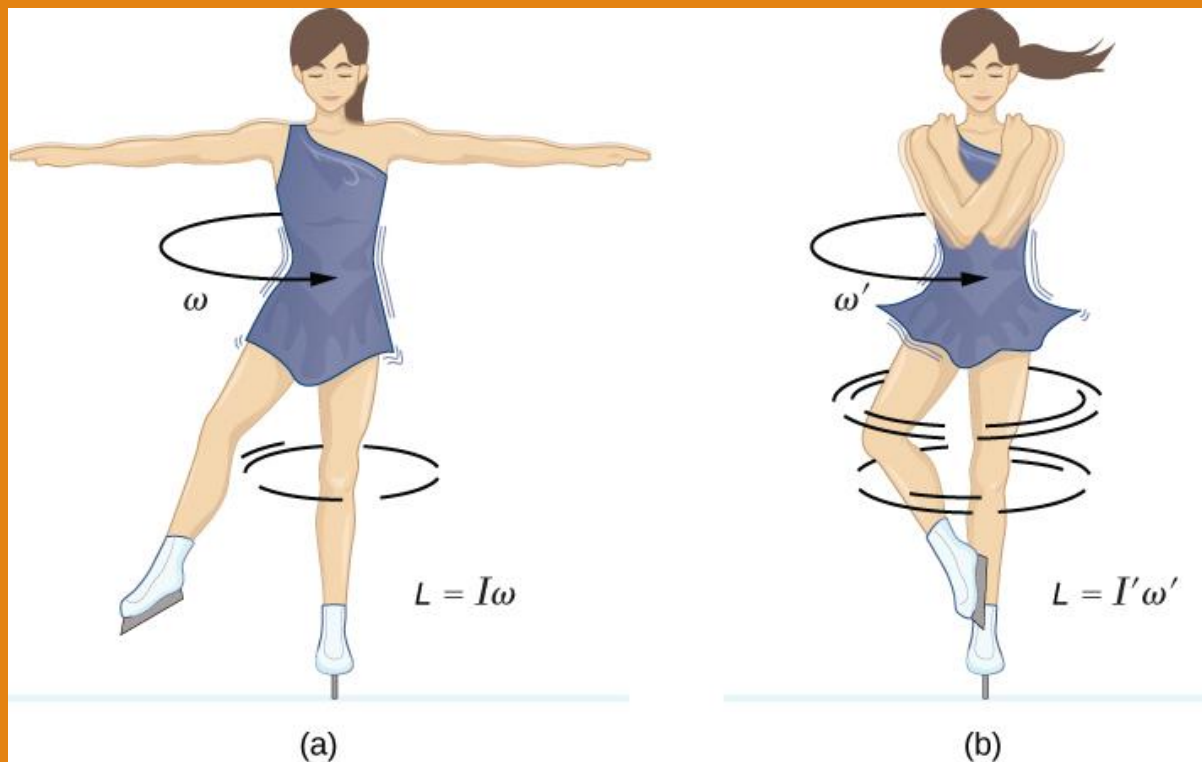
Excel: REGLINP



$$I = \frac{mgr}{4\pi^2 a} = 0,008506[\text{kg} \cdot \text{m}^2] = 8,506 \cdot 10^3[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

$$r^* = 0,27\text{m}$$

# Zasada zachowania momentu pędu



$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$I\omega = I'\omega'$$

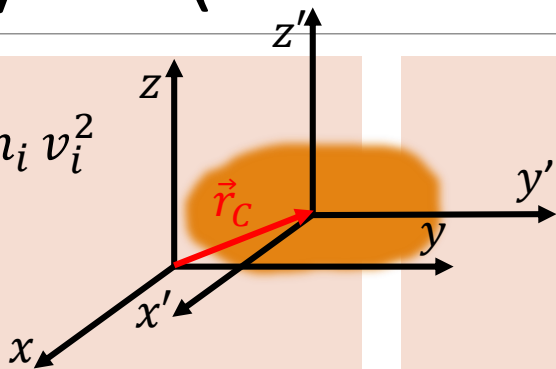
Treści dostępne za darmo na

<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/11-3-zasada-zachowania-momentu-pedu>

# Energia kinetyczna układu $n$ punktów materialnych (twierdzenie Koeniga)

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i^W$$



$\vec{v}_i$  – prędkość bezwzględna punktu materialnego (względem układu nieruchomego  $OXYZ$ )

$\vec{v}_i^W$  – prędkość względna punktu materialnego (względem układu ruchomego  $CX'Y'Z'$ )

$\vec{v}_C$  – prędkość unoszenia ŚM (prędkość układu  $CX'Y'Z'$  względem układu nieruchomego  $OXYZ$ )

$\vec{r}_i$  – wektor wodzący punktów materialnych względem układu  $CX'Y'Z'$

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_i^W)^2 = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [\vec{v}_C^2 + (\vec{v}_i^W)^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_i^W] = \\ &= \frac{1}{2} v_C^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i^W)^2 + \underbrace{\vec{v}_C \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^W}_{=0 \text{ bo}} \\ &\qquad\qquad\qquad \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0 \end{aligned}$$

**Energia kinetyczna układu punktów materialnych składa się z energii kinetycznej ruchu postępowego i energii kinetycznej ruchu względnego dookoła środka masy!**

# Energia kinetyczna bryły sztywnej

## Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu postępowym

**W ruchu postępowym bryły sztywnej wszystkie jej punkty mają taką samą prędkość!**

$$E_k = \frac{1}{2} v^2 \underbrace{\int dm}_M$$

$$E_k = \frac{1}{2} M v^2$$

## Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu obrotowym dookoła nieruchomej osi

$$E_{ki} = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$

$E_{ki}$  – energia kinetyczna elementu bryły sztywnej o masie  $dm$

$r$  – odległość elementu bryły sztywnej o masie  $dm$  od osi obrotu

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int r^2 dm}_I$$

# Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu płaskim

W ruchu płaskim wszystkie punkty bryły sztywnej poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej nieruchomej płaszczyzny zwanej płaszczyzną kierującą. Ruch bryły sztywnej można wówczas analizować badając jeden wybrany jej przekrój np. przechodzący przez ŚM.

Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu płaskim złożonym z ruchu postępowego z prędkością ŚM i ruchu obrotowego dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny kierującej i przechodzącej przez ŚM

$$E_k = \frac{1}{2} \int \left( \vec{v}_C + \underbrace{\vec{v}^w}_{\omega \times r = \omega r} \right)^2 dm = \frac{1}{2} v_C^2 \underbrace{\int dm}_m + \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int r^2 dm}_I + \underbrace{\vec{v}_C \cdot \int \vec{v}^w dm}_{=0}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

# Dynamika ruchu postępowego bryły sztywnej (ruch płaski)

$$m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^Z$$
$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^Z \quad m \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^Z \quad m \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iz}^Z$$

*r.post.*  
 $\vec{L}_C = 0$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iC} = 0$$

W ruchu postępowym bryły sztywnej suma geometryczna momentów  $\vec{M}_{iC}$  wszystkich sił zewnętrznych względem ŚM wynosi 0.

**W ruchu postępowym bryły sztywnej wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych ma kierunek prostej przechodzącej przez jej ŚM!**

# Dynamika ruchu płaskiego bryły sztywnej

Rozważamy ruch płaski złożony z ruchu postępowego z prędkością  $\dot{S}M$  i ruchu obrotowego dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny kierującej i przechodzącej przez  $\dot{S}M$ .

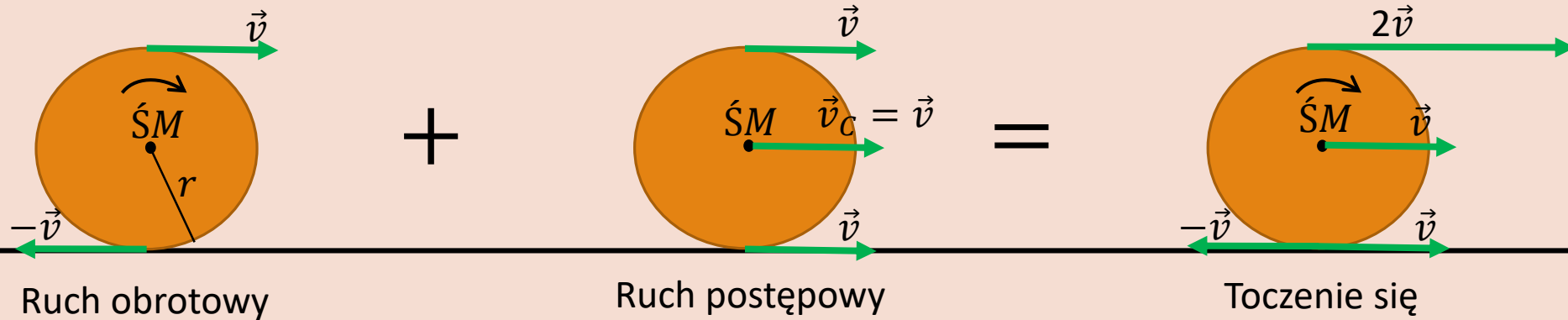
Dla centralnej osi obrotu pokrywającej się z osią  $Z$  układu współrzędnych:

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^z \quad m \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^z \quad I \varepsilon = \sum_{i=1}^n M_{iz}$$

$\varepsilon$  – przyspieszenie kątowe bryły sztywnej względem osi centralnej

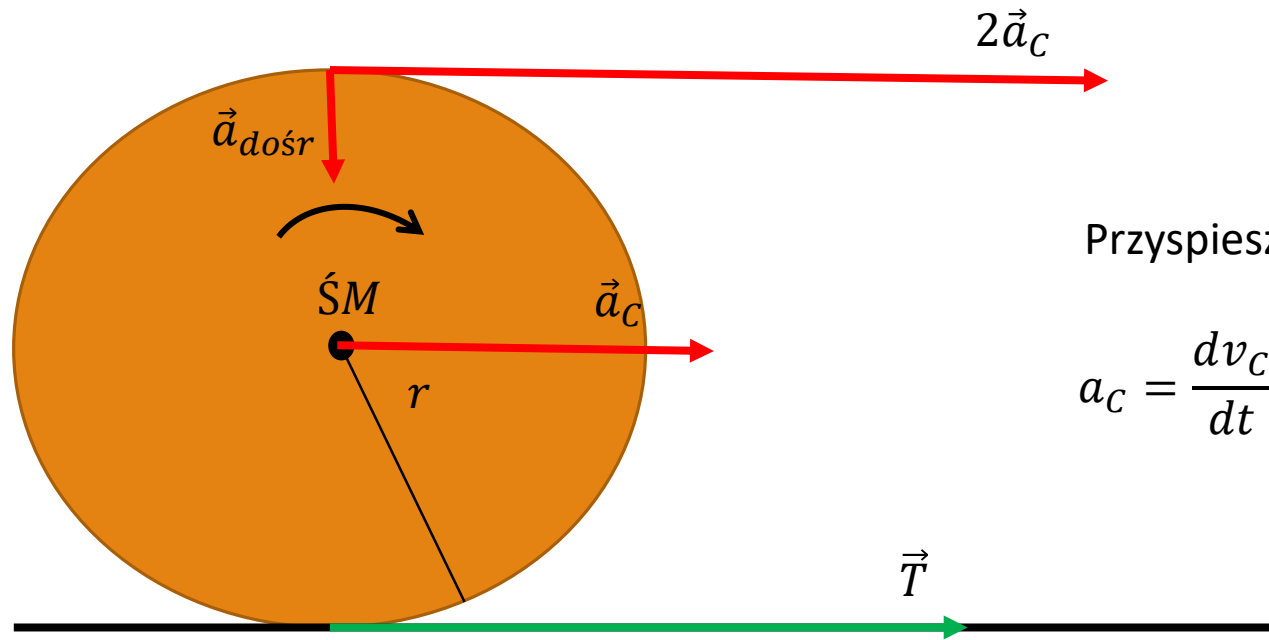
# Toczenie się bez poślizgu

Złożenie ruchu postępowego z ruchem obrotowym to toczenie się.



$$v_C = v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

# Toczenie się bez poślizgu

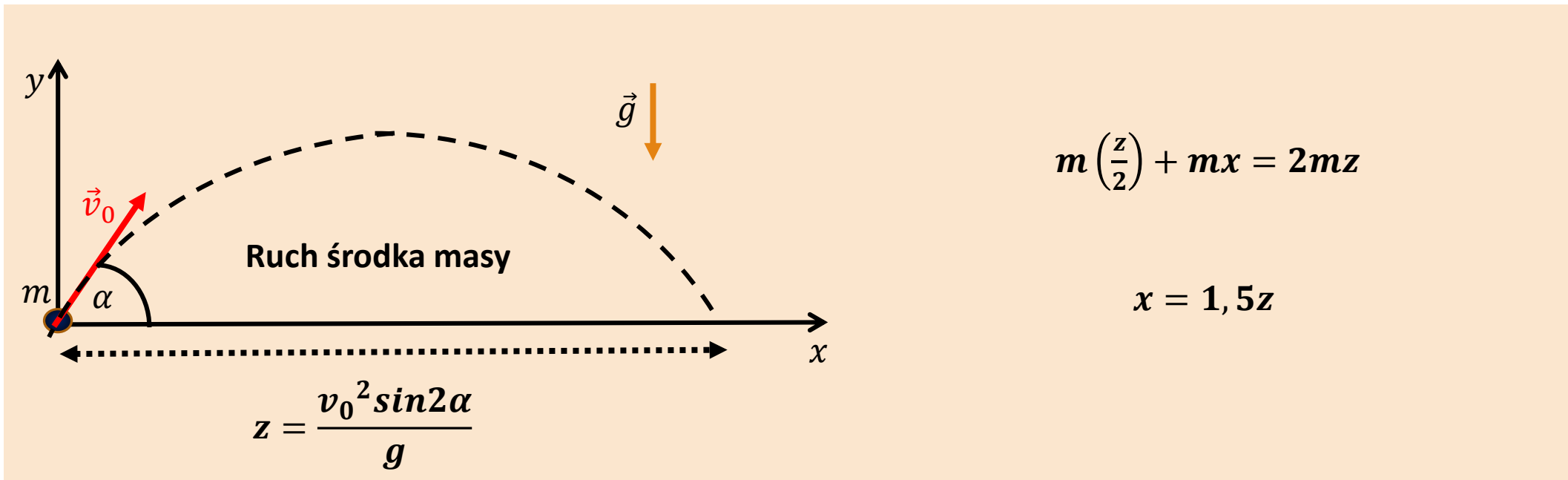


Przyspieszenie kątowe:

$$a_C = \frac{dv_C}{dt} = r \frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon$$

# Przykład: ruch rozpadającego się pocisku

Pocisk zostaje wystrzelony pod kątem  $\alpha$  do poziomu z prędkością początkową  $\vec{v}_0$ . W najwyższym punkcie toru pocisk rozpada się na dwie części o równych masach. Jeżeli wiadomo, że jedna część pocisku spadnie pionowo w dół – obliczyć gdzie spadnie druga część pocisku?



# Przykłady

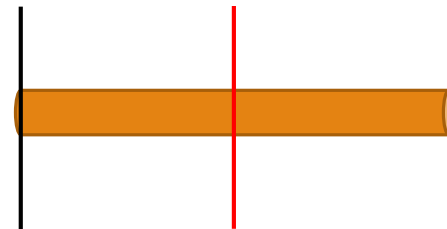
---

## Zad. 1.

Obliczyć prędkości  $v_t$  kuli, obręczy i pełnego walca (wszystkie o masie  $m$ ) staczających się z równi pochyłej o wysokości  $h$ , a następnie porównać je z prędkościami  $v_z$  tych ciał zsuwających się z równi pochyłej bez tarcia. Wszystkie prędkości wyznaczyć dla ciał znajdujących się na końcu równi.

**Zad. 2.** Obliczyć momenty bezwładności cienkiego jednorodnego pręta o długości  $l$  i masie  $m$  względem osi obrotu jak na rysunku:

Czy można tutaj skorzystać z twierdzenia Steinera?



## Zad. 3.

Obliczyć przyspieszenie (liniowe i kątowe) walca o masie  $m$  i promieniu  $r$  staczającego się bez poślizgu z równi pochyłej bez prędkości początkowej. Jaki musi być współczynnik tarcia, aby walec staczał się bez poślizgu? Co zmieniłoby się gdyby walec staczał się z poślizgiem?

# Literatura

---

1. I. W. Sawieliew, KURS FIZYKI T. 1 „Mechanika”, „Fizyka cząsteczkowa”, PWN, W-wa 1987 (lub nowsze wydania).
2. L. D. Landau, E. M. Lifszyc, Krótki kurs fizyki teoretycznej T. 1, PWN, W-wa 1980 (lub nowsze wydania).
3. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki T. 1, PWN, W-wa 1984 (lub nowsze wydania).
4. A. Piekara, Mechanika ogólna, PWN, W-wa 1975 (lub nowsze wydania).
5. W. Moebis, S. J. Ling, J. Sanny , Fizyka dla szkół wyższych Tom I, ISBN-13: 978-83-948838-1-2  
<https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1>
6. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki 1, PWN, W-wa 2011 (lub inne wydania).