

# Ruch krzywoliniowy. Siły bezwładności.

---

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA



# Pochodna wektora jednostkowego (wersora)

Wersor to wektor jednostkowy:

$$|\vec{e}| = 1 \quad \vec{e} \cdot \vec{e} = 1$$

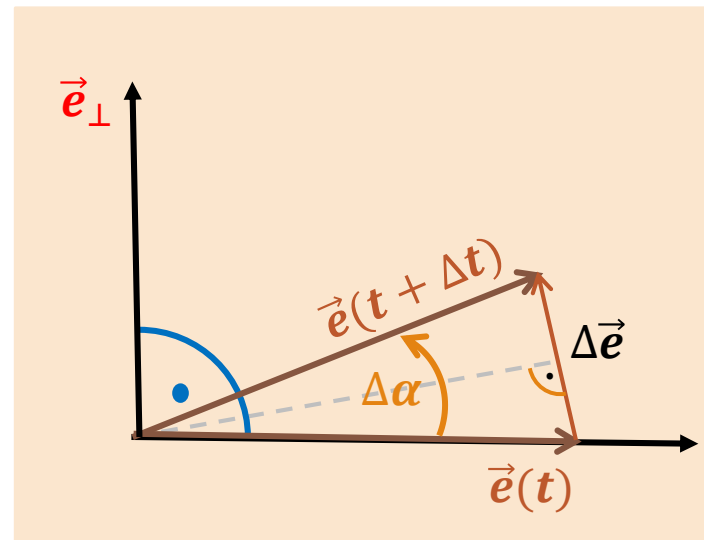
$$\frac{d}{dt} (\vec{e} \cdot \vec{e}) = 0 = 2 \left( \frac{d\vec{e}}{dt} \cdot \vec{e} \right)$$

Dla  $\frac{d\vec{e}}{dt} \neq 0$  i  $\vec{e} \neq 0$  zachodzi:

$$\frac{d\vec{e}}{dt} \perp \vec{e}$$

$$d\vec{e} \perp \vec{e}$$

Przyrost wersora:



$$|\vec{e} + \Delta\vec{e}| = |\vec{e}(t + \Delta t)| = 1$$

$$\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \frac{|\Delta\vec{e}|}{2} / |\vec{e}|$$

$$|d\vec{e}| = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} |\vec{e}| \frac{\sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\frac{\Delta\alpha}{2}} \Delta\alpha$$

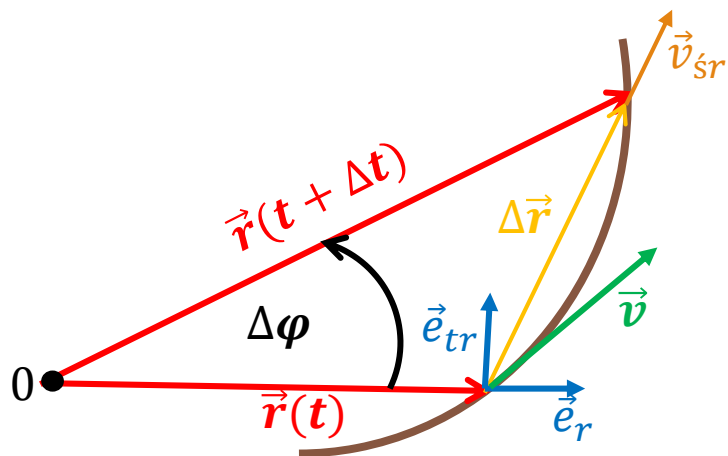
$$|d\vec{e}| = |\vec{e}| d\alpha = d\alpha$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt} \vec{e}_\perp$$

# Ruch krzywoliniowy - prędkość

## Składowa radialna i transwersalna

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r} \vec{e}_r + r \underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}}_{v_{tr}\vec{e}_{tr}} = v\vec{e}_t$$



Pochodna wektora jednostkowego względem czasu równa jest prędkości końca tego wektora.

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} \perp \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_{tr}$$

$$v = \sqrt{v_r^2 + v_{tr}^2}$$

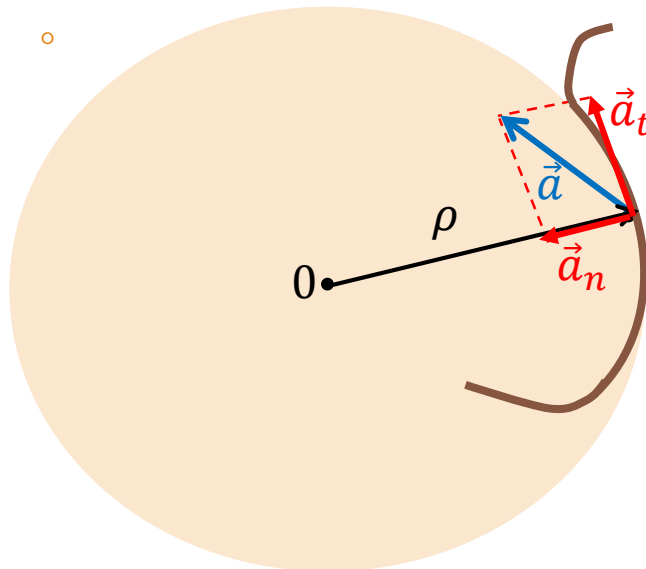
$$v_r = \frac{dr}{dt} \equiv \dot{r} \quad v_{tr} = r \frac{d\varphi}{dt} \equiv r\dot{\varphi}$$

# Ruch krzywoliniowy - przyspieszenie

## Składowa styczna i normalna

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{e}_t}_{\vec{a}_t = a_t\vec{e}_t} + v \underbrace{\frac{d\vec{e}_t}{dt}}_{\vec{a}_n = a_n\vec{e}_n}$$

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} \perp \vec{e}_t$$



$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{d\vec{e}_t}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{v}{\rho} \vec{e}_n$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \vec{e}_n$$

## Składowa radialna i transwersalna

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\phi}\vec{e}_{tr}) =$$

$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r}\dot{\phi}\vec{e}_{tr} + r\ddot{\phi}\vec{e}_{tr} + r\dot{\phi} \frac{d\vec{e}_{tr}}{dt} =$$

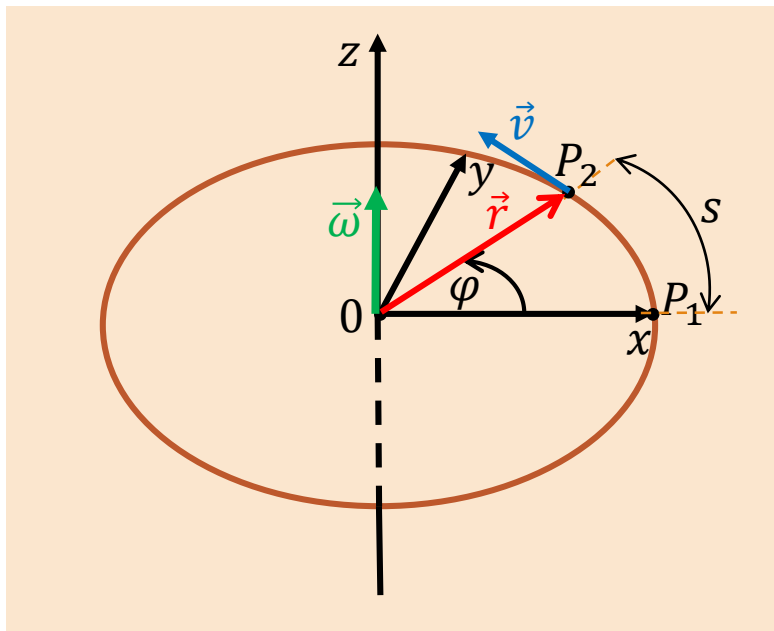
$$= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)}_{\vec{a}_r = a_r\vec{e}_r} \vec{e}_r + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})}_{\vec{a}_{tr} = a_{tr}\vec{e}_{tr}} \vec{e}_{tr}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\phi}^2$$

$$a_{tr} = 2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi}$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{a_r^2 + a_{tr}^2}$$

# Ruch punktu po okręgu



$$\vec{\omega} = \omega \vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$s = r\varphi$$

$$\downarrow$$
$$v = \frac{ds}{dt} = r \underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\omega}$$

$v$  – prędkość liniowa mierzona w  $\left[\frac{m}{s}\right]$

$\omega$  – prędkość kątowa mierzona w  $\left[\frac{rad}{s}\right]$

Ruch przy stałej prędkości kątowej nazywa się **ruchem jednostajnym po okręgu**.

# Ruch punktu po okręgu – siła dośrodkowa

**Okres  $T$**  w ruchu jednostajnym po okręgu to czas przebycia drogi kątowej równej  $2\pi$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

**Częstość  $\nu$**  w ruchu jednostajnym po okręgu to liczba obiegów wykonanych w ciągu sekundy czyli odwrotność okresu  $T$ :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \longrightarrow \quad \omega = 2\pi\nu$$

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r=0} \vec{e}_r + r \underbrace{\frac{d\phi}{dt}}_{v_{tr} \equiv v_t} \vec{e}_{tr} = r\dot{\phi} \vec{e}_{tr}$$

$$\vec{e}_{tr} \equiv \vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(r\dot{\phi}\vec{e}_t) = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n = \underbrace{\dot{\phi}\dot{r}}_{=0} \vec{e}_t + \underbrace{r\ddot{\phi}}_{=r\varepsilon} \vec{e}_t + \underbrace{r\dot{\phi}^2}_{\frac{v^2}{r}} \vec{e}_n$$

$$\vec{\varepsilon} = \varepsilon \frac{\vec{\omega}}{\omega} - \text{przyspieszenie kątowe}$$

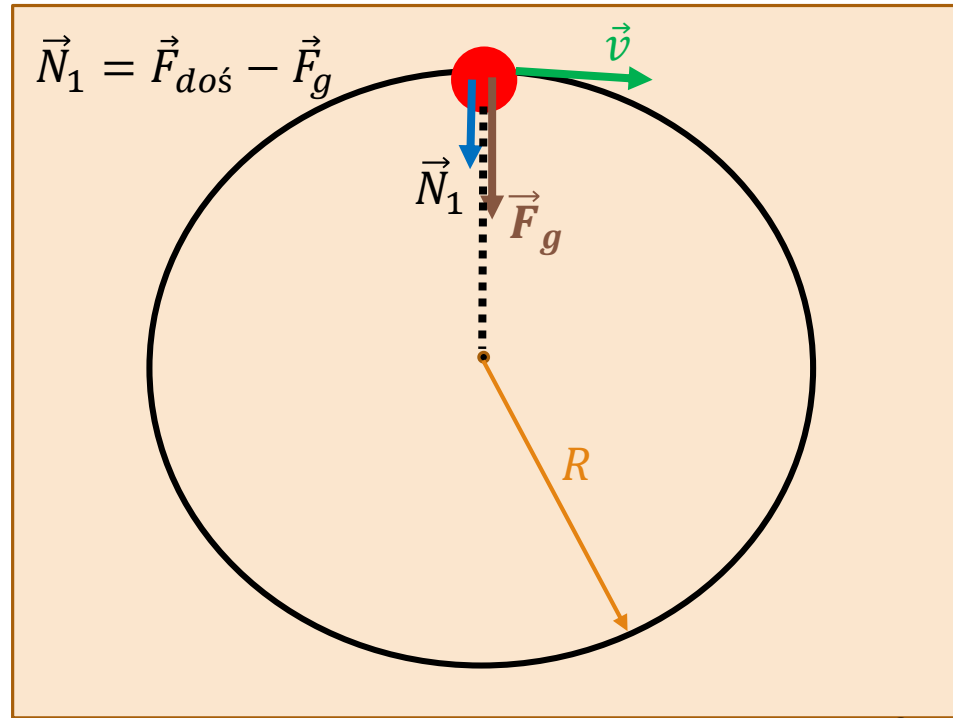
$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \frac{\frac{1}{r}\vec{e}_n}{\frac{ds}{ds}} \cdot \frac{r\dot{\phi}}{dt} = \dot{\phi}\vec{e}_n$$

**Siła dośrodkowa działająca na punkt materialny o masie  $m$ :**

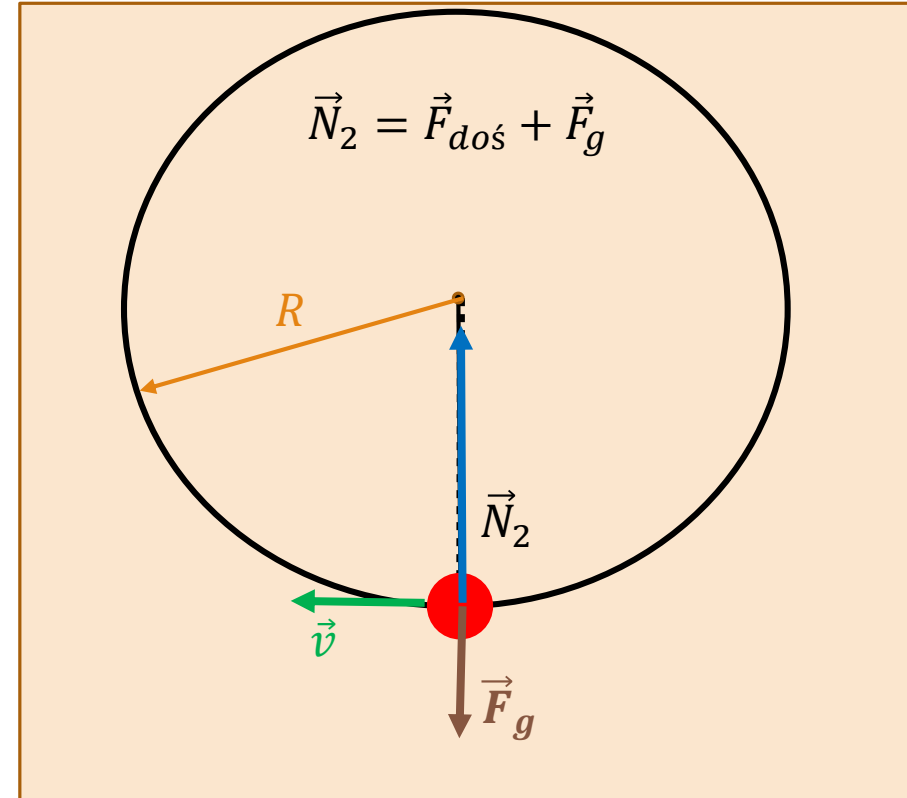
$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = m \underbrace{r\dot{\phi}^2}_{\frac{v^2}{r}} \vec{e}_n$$

**Siła dośrodkowa odpowiada za zmianę kierunku prędkości!**

Siła dośrodkowa. Piłeczka na sznurku poruszająca się po okręgu w polu grawitacyjnym.



$$\vec{F}_{doś} = \vec{N}_1 + \vec{F}_g \implies |\vec{N}_1| + mg = \frac{mv^2}{R}$$



$$\vec{F}_{doś} = \vec{N}_2 - \vec{F}_g \implies |\vec{N}_2| - mg = \frac{mv^2}{R}$$

# Ruch punktu po okręgu c. d.

Ruch jednostajny	$a_t = \varepsilon r = 0 \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \text{const.}$ $\omega = \text{const.} \qquad \omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T}$ $\alpha(t) = \omega t$
Ruch jednostajnie zmienny	$a_t = r\varepsilon = \text{const.} \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \varepsilon^2 t^2 r$ $\omega(t) = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\alpha(t) = \omega_0 t \pm \varepsilon \frac{t^2}{2}$
Ruch niejednostajny	$a_t = r\varepsilon \qquad a_n = \frac{v^2}{r}$ $\omega(t) = \int \varepsilon dt \qquad \alpha(t) = \int \omega dt$



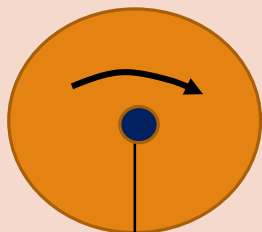
# Siły bezwładności

## Siły bezwładności to siły pozorne.

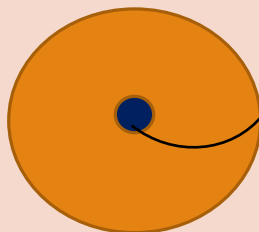
Siła bezwładności może zniknąć przy zmianie układu odniesienia, jaki zostanie wybrany do obserwacji danego zjawiska, np. siła Coriolisa:

$$\vec{F} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$$

Dla obserwatora stojącego na ziemi kulka porusza się po linii prostej



Dla obserwatora stojącego na tarczy



Siłę bezwładności odczuwamy na przykład:

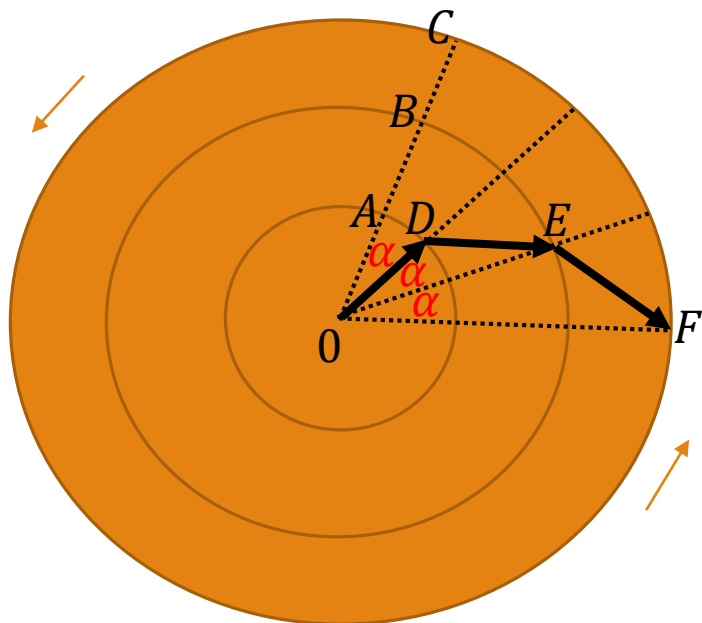
- w windzie,
- w samochodzie, tramwaju, autobusie,
- na karuzeli

Siły bezwładności nie obserwujemy, jeśli oglądamy jazdę przyspieszającego samochodu z przystanku autobusowego, czy przejażdżkę na karuzeli z ławki na placu zabaw.

# Siła Coriolisa

Tarcza obraca się ruchem JEDNOSTAJNYM

(ze stałą prędkością kątową  $\vec{\omega}$ )



$$\alpha = \omega \Delta t$$

Układ nieruchomy (związany z Ziemią)

**0ABC – tor kulki**

$$0A = AB = BC = \Delta s = v \Delta t$$

Układ ruchomy (związany z tarczą)

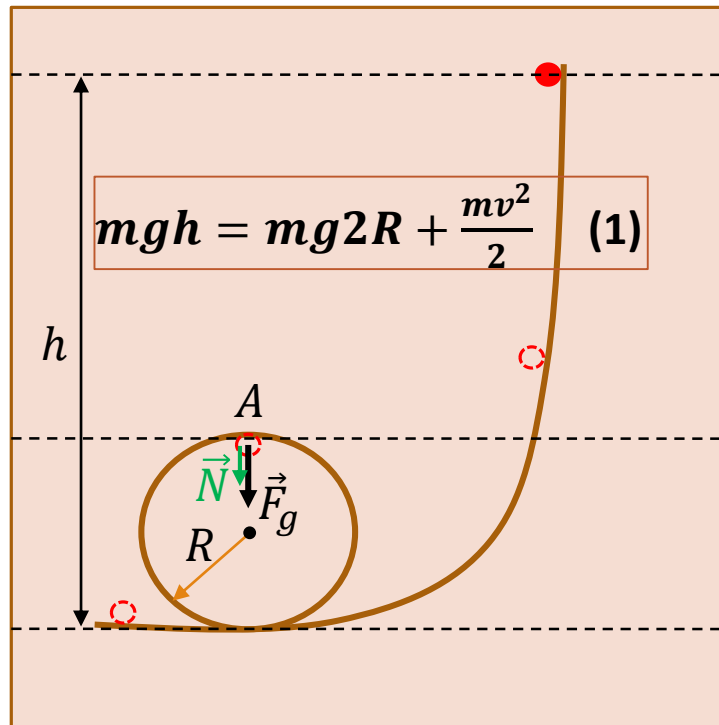
**0DEF – tor kulki**

$$AD = 0A \cdot \alpha = \Delta s \omega \Delta t = v \Delta t \omega \Delta t = \frac{1}{2} \underbrace{a_c}_{2v\omega} (\Delta t)^2$$

$$\vec{F}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$$

# Siła odśrodkowa

Kulka w rynience lub kolejka góraska w Wesołym Miasteczku:



Aby kulka w punkcie A nie oderwała się od rynienki musi być spełniony warunek:

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}$$

$$\frac{mv^2}{R} \geq mg \quad (2)$$

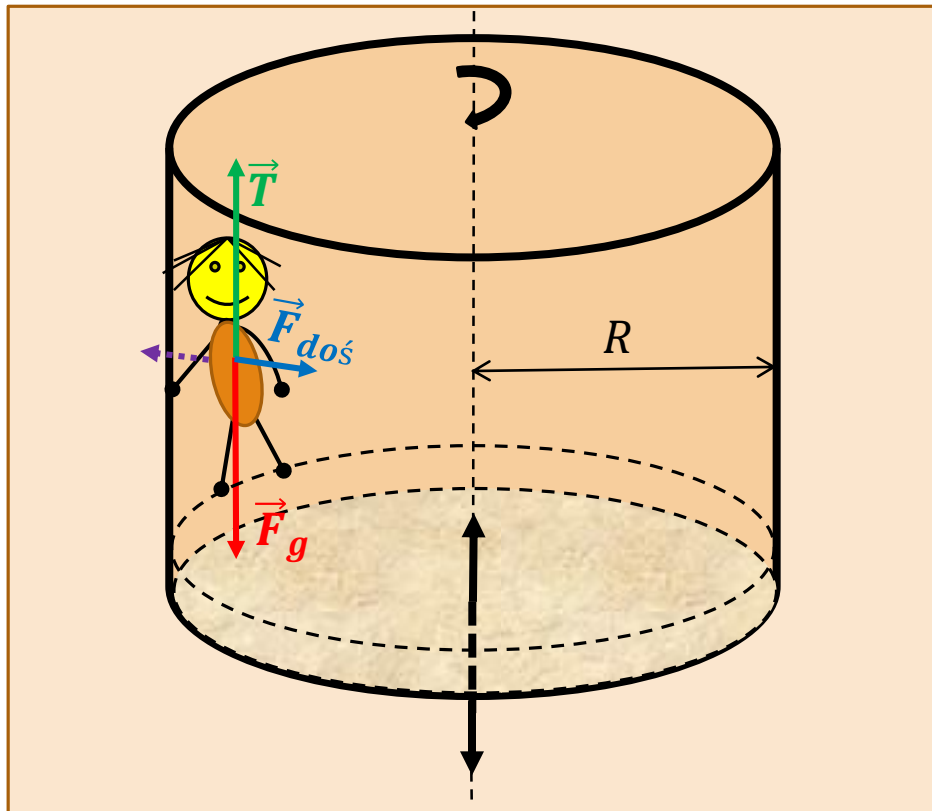
**Siła odśrodkowa** jako siła bezwładności pojawia się tylko w układach nieinercjalnych.

**Siła odśrodkowa** wynika z ruchu układu odniesienia, nie jest więc powodowana żadnym oddziaływaniem.

$$\text{Z (1) i (2): } h \geq 2,5R$$

# Siła dośrodkowa – rotor.

Rotor obracający się z prędkością kątową  $\vec{\omega}$ :



$$T \sim N \quad T \leq \mu N$$

$$\vec{F}_{doś} \equiv \vec{N}$$

Jeżeli spełniony jest warunek:

$$mg \leq \mu N$$

$$\downarrow$$
$$mg \leq \frac{mv^2}{R} \mu$$

wówczas człowiek będzie unosił się nad podłogą

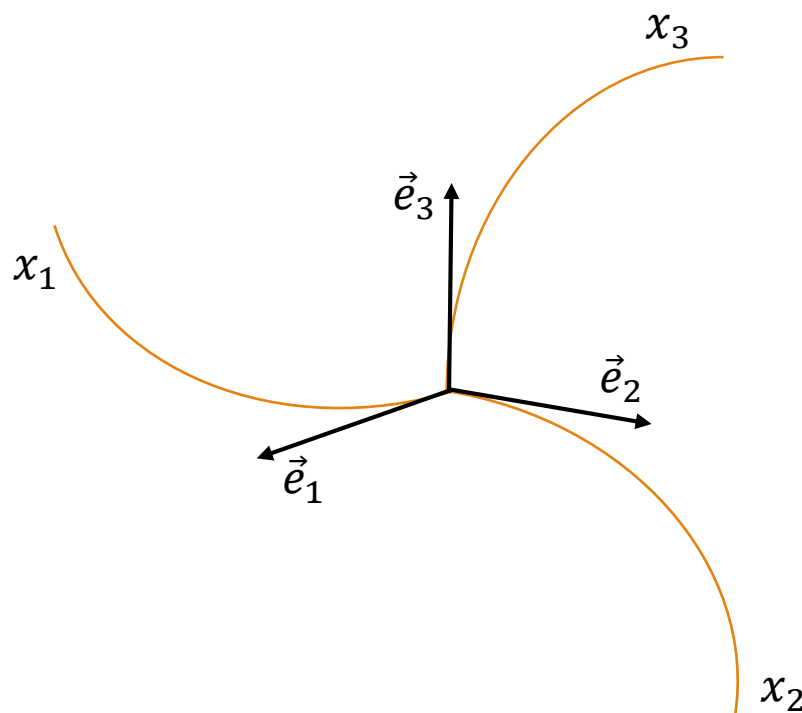
$$v_{gr} \geq \sqrt{\frac{gR}{\mu}}$$

# Prostokątne układy krzywoliniowe

$\mathbb{R}^3$

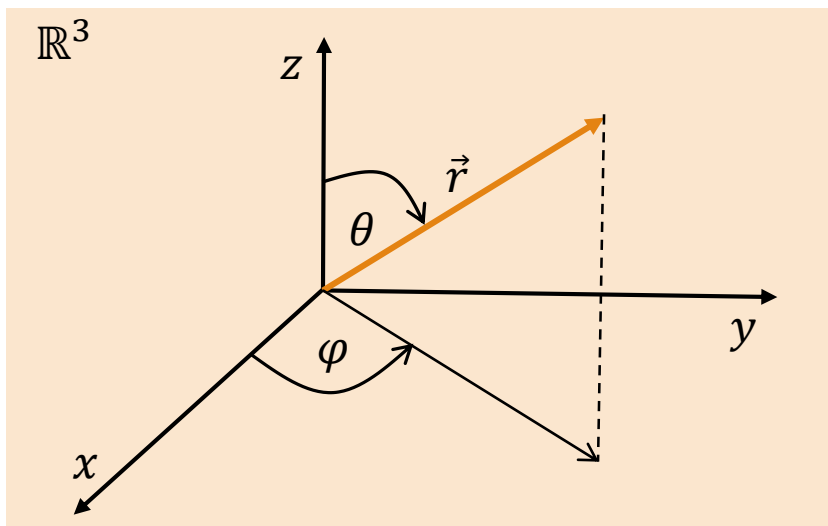
$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$  - baza ortonormalna

$x_1, x_2, x_3$  - współrzędne punktu



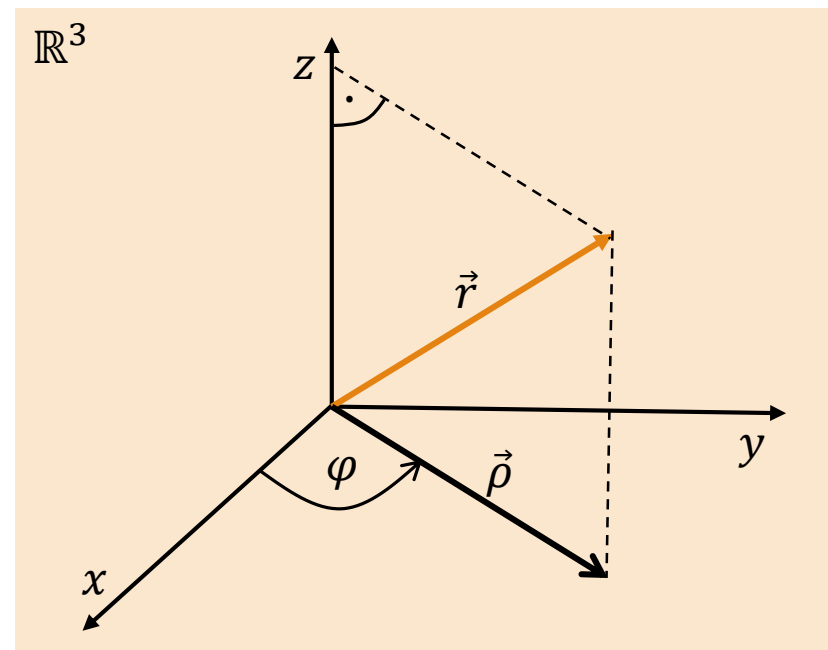
# Przykłady prostokątnych układów krzywoliniowych

Układ współrzędnych sferycznych  $(r, \theta, \varphi)$



$$0 \leq \theta \leq \pi \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Układ współrzędnych walcowych  $(\rho, \varphi, z)$



$$0 \leq \varphi < 2\pi$$

# Przykłady

---

## Zad. 1.

Mrówka porusza się ze stałą prędkością  $v_0$  wzdłuż promienia kołistej tarczy wirującej wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową  $\omega$ . Wyznaczyć w nieruchomym układzie odniesienia: a) zależność od czasu wartości wektora prędkości oraz jego składowych radialnej i transwersalnej, b) zależność od czasu wartości wektora przyspieszenia, jak również jego składowych: radialnej, transwersalnej oraz normalnej i stycznej.

## Zad. 2.

Piłka została kopnięta poziomo ze wzniesienia z prędkością  $v_0$ . Wyznaczyć promień krzywizny toru piłki po upływie czasu  $t$  od momentu jej kopnięcia. Opór powietrza pominąć.

## Zad. 3.

Samochód o masie  $m$  porusza się po torze płaskim o współczynniku tarcia statycznego  $\mu$  wzdłuż łuku stanowiącego wycinek okręgu o promieniu  $r$ . Obliczyć maksymalną prędkość  $v_{max}$  samochodu, przy której samochód jeszcze nie wpadnie w poślizg. Czy prędkość ta ulegnie zmianie w przypadku ruchu samochodu na pochylonym zakręcie?

# Literatura

---

1. I. W. Sawieliew, KURS FIZYKI T. 1 „Mechanika”, „Fizyka cząsteczkowa”, PWN, W-wa 1987 (lub nowsze wydania).
2. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki T. 1, PWN, W-wa 1984 (lub inne wydania).
3. A. Hennel, W. Krzyżanowski, W. Szuszkiewicz, K. Wódkiewicz, Zadania i problemy z fizyki T. 1, PWN, W-wa 1974 (lub inne wydania).
4. B. M. Jaworski, A. A. Piński, Elementy fizyki Tom 1 i 2, PWN, W-wa 1976 (lub nowsze wydania).
5. E. Karaśkiewicz, Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, W-wa 1976 (lub inne wydania).