

Układy punktów materialnych. Bryła sztywna

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Punkt materialny

Punkt materialny to inaczej **masa punktowa** (ciało fizyczne o pewnej masie mające nieskończenie małe rozmiary) czyli przybliżenie, które stosuje się w sytuacjach, w których rozmiary ciała są znacznie mniejsze od rozmiarów innych elementów badanego układu oraz gdy rozmiary i kształt ciała nie mają znaczenia w rozpatrywanym zagadnieniu – przyjmuje się wówczas, że cała masa skupiona jest w punkcie zwanym

środkiem masy

badanego układu.

Układ punktów materialnych

Zbiór punktów materialnych, w którym położenie każdego punktu zależy od położenia pozostałych punktów nazywa się **układem punktów materialnych**.

Układ n punktów materialnych posiada $3n$ niezależnych zmiennych potrzebnych do jednoznacznego opisanie stanu układu zwanych **stopniami swobody** (3 stopnie swobody na każdy punkt układu).

Układ punktów swobodnych nie jest ograniczony żadnymi **więzami**.

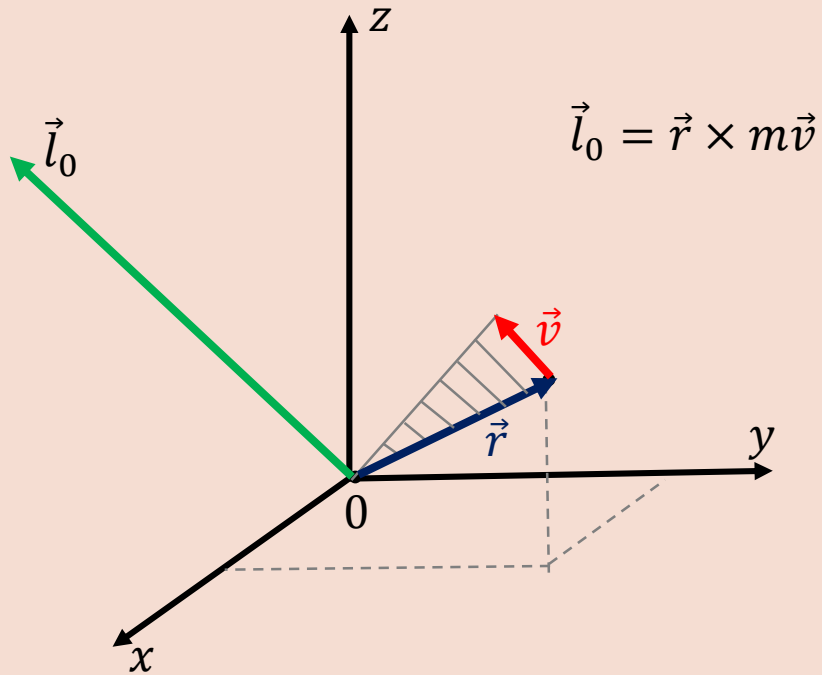
Układ punktów nieswobodnych jest ograniczony nałożonymi na punkty układu więzami.

Bryła sztywna to układ punktów materialnych, których wzajemne odległości nie mogą ulec zmianie (rozciągły rozkład masy). Bryła sztywna posiada 6 stopni swobody.

W układzie n punktów materialnych działają siły pochodzące od wzajemnych oddziaływań punktów układu zwane **siłami wewnętrznymi** \vec{F}_{ij}^w oraz **siły zewnętrzne** \vec{F}_i^z , ($i = 1, 2, 3 \dots, n$).

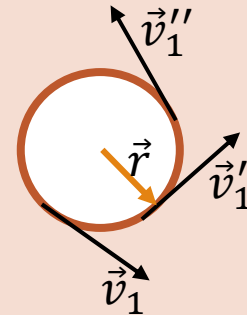
Moment pędu

Moment pędu \vec{l}_0 względem punktu 0:



$$\vec{l}_0 = \vec{r} \times m\vec{v} = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{m(yv_z - zv_y)}_{l_{0x}} \vec{i} + \underbrace{m(zv_x - xv_z)}_{l_{0y}} \vec{j} + \underbrace{m(xv_y - yv_x)}_{l_{0z}} \vec{k}$$



$$\vec{p}_1 = m\vec{v}_1 \quad \vec{p}_1' = m\vec{v}_1'$$

$$\vec{l}_{01} = \vec{r} \times \vec{p}_1 = \vec{l}_{01}' = \vec{r} \times \vec{p}_1'$$

Zasada zachowania momentu pędu

Ruch punktu materialnego pod działaniem siły \vec{F} :

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times m\vec{v}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times m\vec{v}}_{=\vec{v} \times m\vec{v}=0} + \vec{r} \times \underbrace{\frac{d(m\vec{v})}{dt}}_{=\frac{d\vec{p}}{dt}}$$

$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}_0$$

Moment pędu \vec{l}_0 i moment siły \vec{M}_0 określone są względem wspólnego punktu 0.

$$\frac{dl_{0x}}{dt} = M_{0x} \quad \frac{dl_{0y}}{dt} = M_{0y} \quad \frac{dl_{0z}}{dt} = M_{0z}$$

$$\vec{M}_0 = 0:$$



$$\frac{d\vec{l}_0}{dt} = 0$$

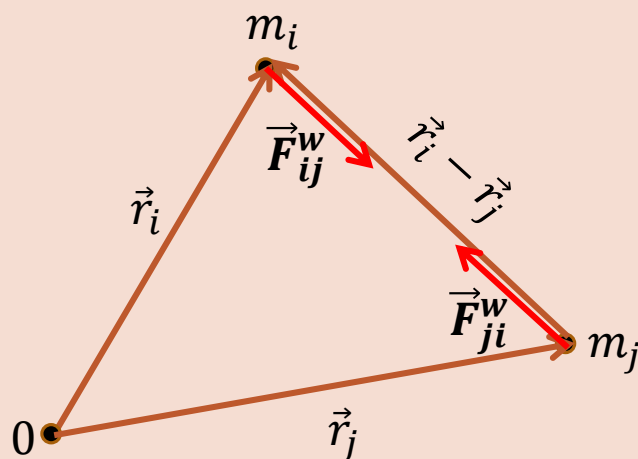


$$\vec{l}_0 = \text{const}$$

Dynamika układu punktów materialnych

Ruch układu n punktów materialnych zależy od sił zewnętrznych \vec{F}_i^z i wewnętrznych \vec{F}_{ij}^w .

$$\vec{F}_{ij}^w = -\vec{F}_{ji}^w$$



Suma geometryczna wszystkich sił wewnętrznych \vec{F}_{ij}^w oraz ich momentów względem dowolnego punktu wynosi 0:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}^w = 0$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij}^w = 0$$

\vec{r}_i — promień punktu o masie m_i o początku w biegunie 0.

Dynamika układu punktów materialnych. Środek masy

Punkt określony wektorem wodzącym:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i$$

nazywa się **środkiem masy układu** (ŚM)
n punktów materialnych.

$$x_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i x_i, \quad y_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i y_i,$$

$$z_C = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i z_i$$

Dla rozkładu ciągłego masy:

$$\vec{r}_C = \frac{1}{m} \int \vec{r} dm$$

Dynamikę i – tego punktu materialnego opisuje równanie:

$$\frac{d^2}{dt^2} (m_i \vec{r}_i) = \vec{F}_i^Z + \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}^w$$

Suma n równań:

$$\sum_{i=1}^n \frac{d^2}{dt^2} (m_i \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^Z + \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \vec{F}_{ij}^w}_{=0}$$

Ruch środka masy

Zakładamy, że masy układu punktów są stałe:

$$\frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=1}^n (m_i \vec{r}_i) = \frac{d^2}{dt^2} (m \vec{r}_C) = m \frac{d^2 \vec{r}_C}{dt^2}$$

$$m \vec{a}_C = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^Z \equiv \vec{F}^Z$$

$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} \equiv m \ddot{x}_C = F_x^Z, m \ddot{y}_C = F_y^Z, m \ddot{z}_C = F_z^Z$$

Siły wewnętrzne \vec{F}_{ij}^w nie mają wpływu na ruch środka masy!

Ruch środka masy nie zależy od punktu przyłożenia sił zewnętrznych!

Środek masy układu punktów materialnych porusza się tak jakby skupiona w nim była cała masa układu i stanowił on punkt przyłożenia każdej siły zewnętrznej \vec{F}_i^Z .

Jeżeli suma geometryczna sił zewnętrznych \vec{F}_i^Z działających na układ punktów materialnych wynosi zero to jego środek masy nie zmienia swojej prędkości.

Zasada zachowania pędu układu punktów materialnych

Własności mechaniczne odosobnionego układu nie ulegają zmianie przy dowolnym równoległym jego przesunięciu w przestrzeni.

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i = \sum_{i=1}^n m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}$$

$$\vec{P} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = \frac{d}{dt} (m \vec{r}_C) = m \vec{v}_C$$

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = m \vec{a}_C = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^Z \equiv \vec{F}^Z$$

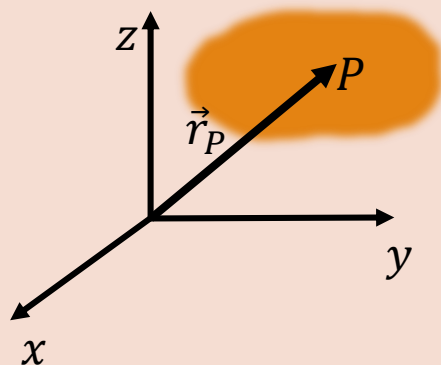
$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0$$

$$\vec{P} = m \vec{v}_C = \text{const.}$$

$$\vec{v}_C = \frac{d\vec{r}_C}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^n \vec{p}_i}{m} = \frac{\vec{P}}{m}$$

Pęd środka masy \vec{P} to całkowity pęd układu!

Moment bezwładności



Moment bezwładności względem punktu

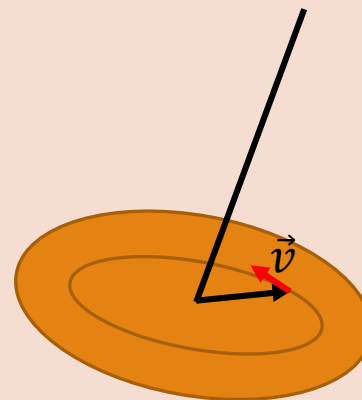
1) dla ciągłego rozkładu masy (np. bryły sztywnej):

$$I = \int r^2 dm = \int (x^2 + y^2 + z^2) dm$$

2) dla układu n punktów:

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2$$

Moment bezwładności pełni analogiczną rolę w dynamice ruchu obrotowego ciała jak masa w dynamice ruchu postępowego!



$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} v^2 dm = \\ &= \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{r^2 dm}_{\substack{\text{jednostkowy} \\ \text{wkład} \\ \text{do momentu} \\ \text{bezwładności} \\ \text{tarczy}}} \end{aligned}$$

Moment bezwładności

Moment bezwładności względem osi

1) dla ciągłego rozkładu masy:

$$I_x = \int (y^2 + z^2) dm$$

$$I_y = \int (x^2 + z^2) dm$$

$$I_z = \int (x^2 + y^2) dm$$

2) dla układu n punktów :

$$I_x = \sum_{i=1}^n m_i (y_i^2 + z_i^2)$$
$$\vdots$$

Moment bezwładności względem płaszczyzny

1) dla ciągłego rozkładu masy:

$$I_{xx} = \int x^2 dm$$

$$I_{yy} = \int y^2 dm$$

$$I_{zz} = \int z^2 dm$$

2) dla układu n punktów :

$$I_{xx} = \sum_{i=1}^n m_i x_i^2$$

$$\vdots$$

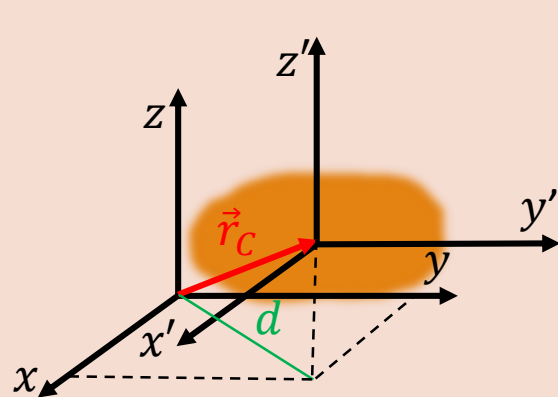
$$I_x = I_{yy} + I_{zz}, I_y = I_{xx} + I_{zz}, I_z = I_{xx} + I_{yy}$$

Moment bezwładności – Twierdzenie Steinera

$OXYZ$ – układ współrzędnych o środku w punkcie O

$CX'Y'Z'$ – układ współrzędnych o środku w punkcie $\dot{S}M$

$X \parallel X' \quad Y \parallel Y' \quad Z \parallel Z'$



$$\begin{aligned}x &= x_C + x' \\y &= y_C + y' \\z &= z_C + z'\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_{xx} &= \int x^2 dm = \int (x_C + x')^2 dm = \\&= x_C^2 \int dm + \underbrace{2x_C \int x' dm}_{=0} + \int x'^2 dm\end{aligned}$$

$$I_{xx} = I_{x'x'} + mx_C^2$$

\vdots

$$I_z = I_{xx} + I_{yy} = I_{x'x'} + mx_C^2 + I_{y'y'} + my_C^2$$

$$I_z = I_{z'} + m \underbrace{(x_C^2 + y_C^2)}_{\substack{\text{odległość } d \\ \text{osi } I_z \text{ od osi } I_{z'}}}$$

\vdots

Moment pędu układu n punktów materialnych

Moment pędu układu n punktów materialnych względem **nieruchomego** punktu 0:

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i$$

Dla układu punktów materialnych poruszających się z prędkością kątową $\vec{\omega}$:

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \times \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

$$\vec{a} \times \vec{b} \times \vec{c} = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

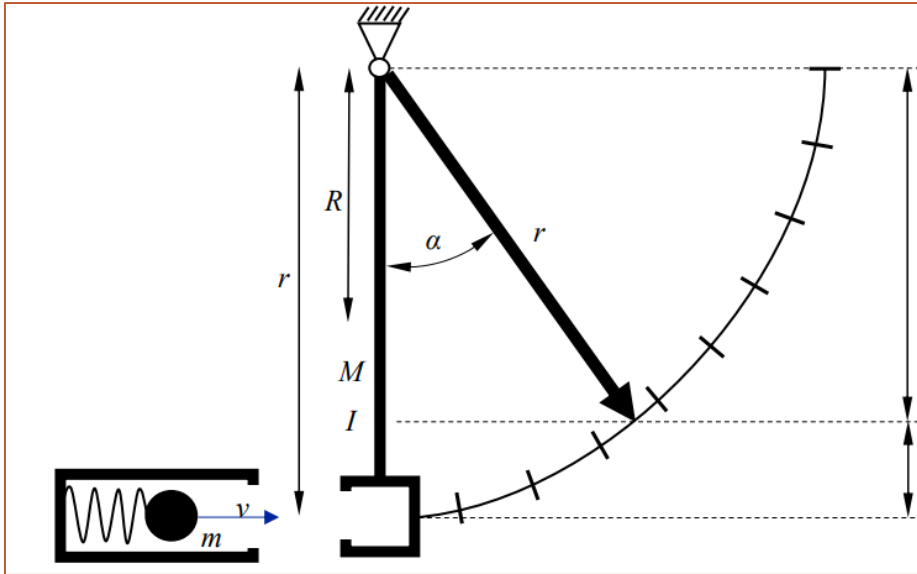
$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^n m_i \left[\vec{\omega}(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i) - \underbrace{\vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega})}_{=0 \text{ dla } \vec{r}_i \perp \vec{\omega}} \right]$$

$$\vec{L}_0 = \vec{\omega} \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i r_i^2}_I = I \vec{\omega}$$

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0 = I \underbrace{\frac{d\vec{\omega}}{dt}}_{\vec{\epsilon}}$$

Zderzenia – wahadło balistyczne

(używając pojęcia momentu bezwładności)



Liczba dodatkowych ciężarków n	Zderzenie dosk. niesprężyste		Zderzenie sprężyste	
	v_0	α	v_0	α
	[]	[]	[]	[]
	$\alpha_1 =$		$\alpha_2 =$	

1. Zderzenie sprężyste

Zasada zachowania momentu pędu

$$mvr = I\omega + mrv'$$

Zasada zachowania energii

$$\frac{I\omega^2}{2} = MgR(1 - \cos\alpha_2)$$

2. Zderzenie doskonale niesprężyste:

Zasada zachowania momentu pędu

$$mvr = (I + mr^2)\omega$$

Zasada zachowania energii

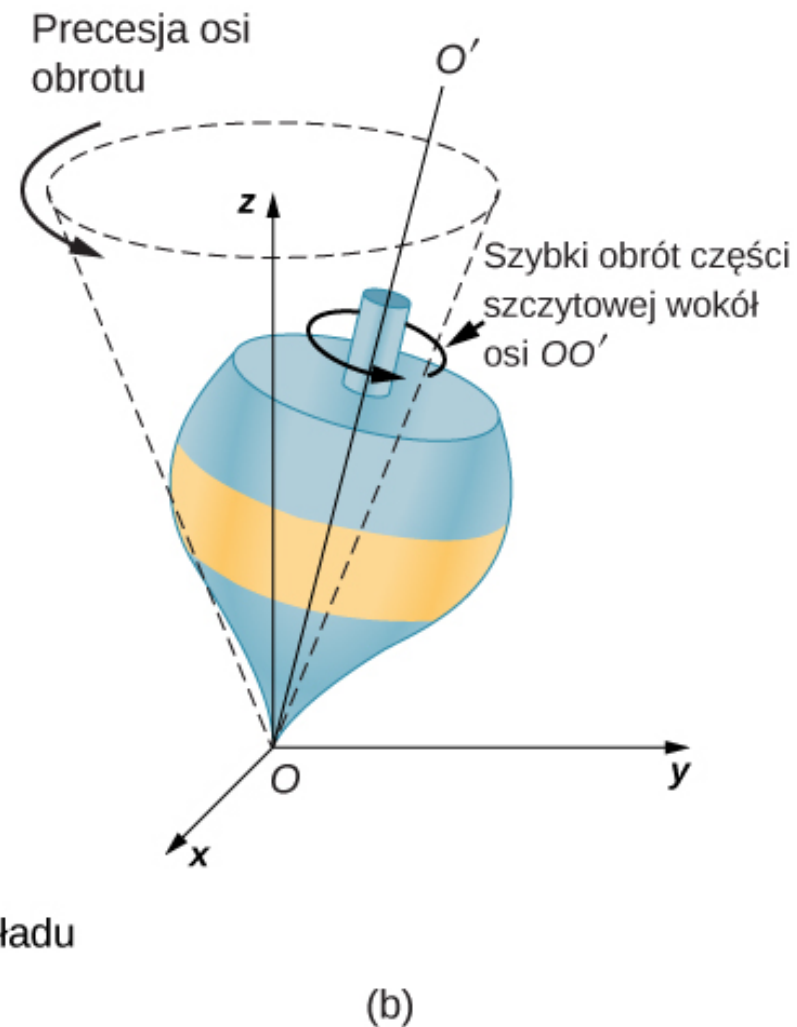
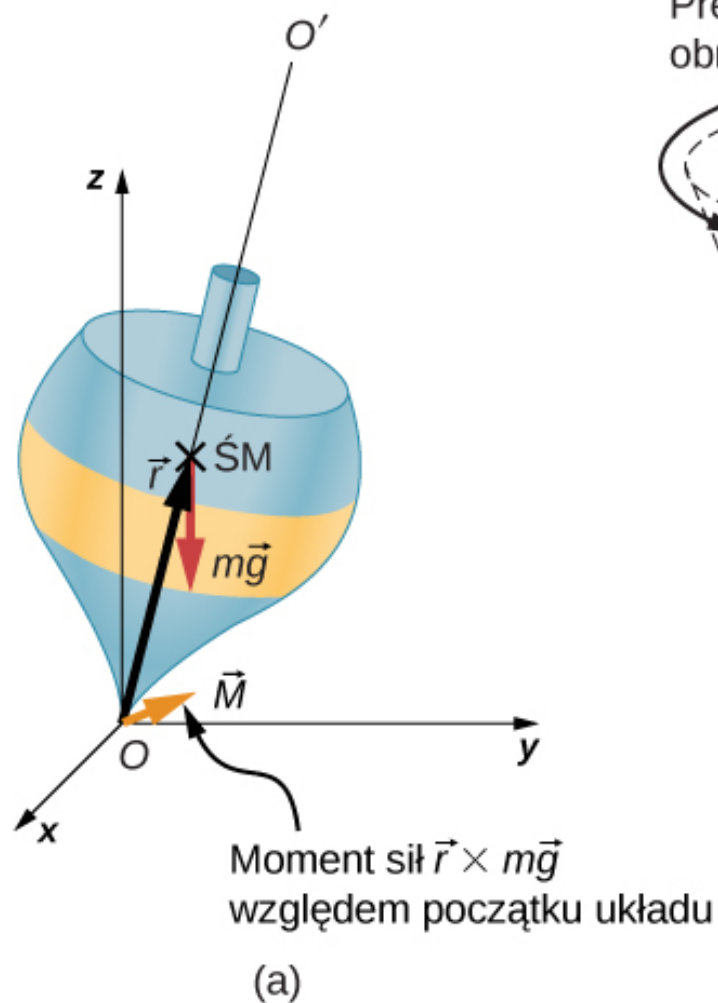
$$\frac{(I + mr^2)\omega^2}{2} = mgr(1 - \cos\alpha_1) + MgR(1 - \cos\alpha_1)$$

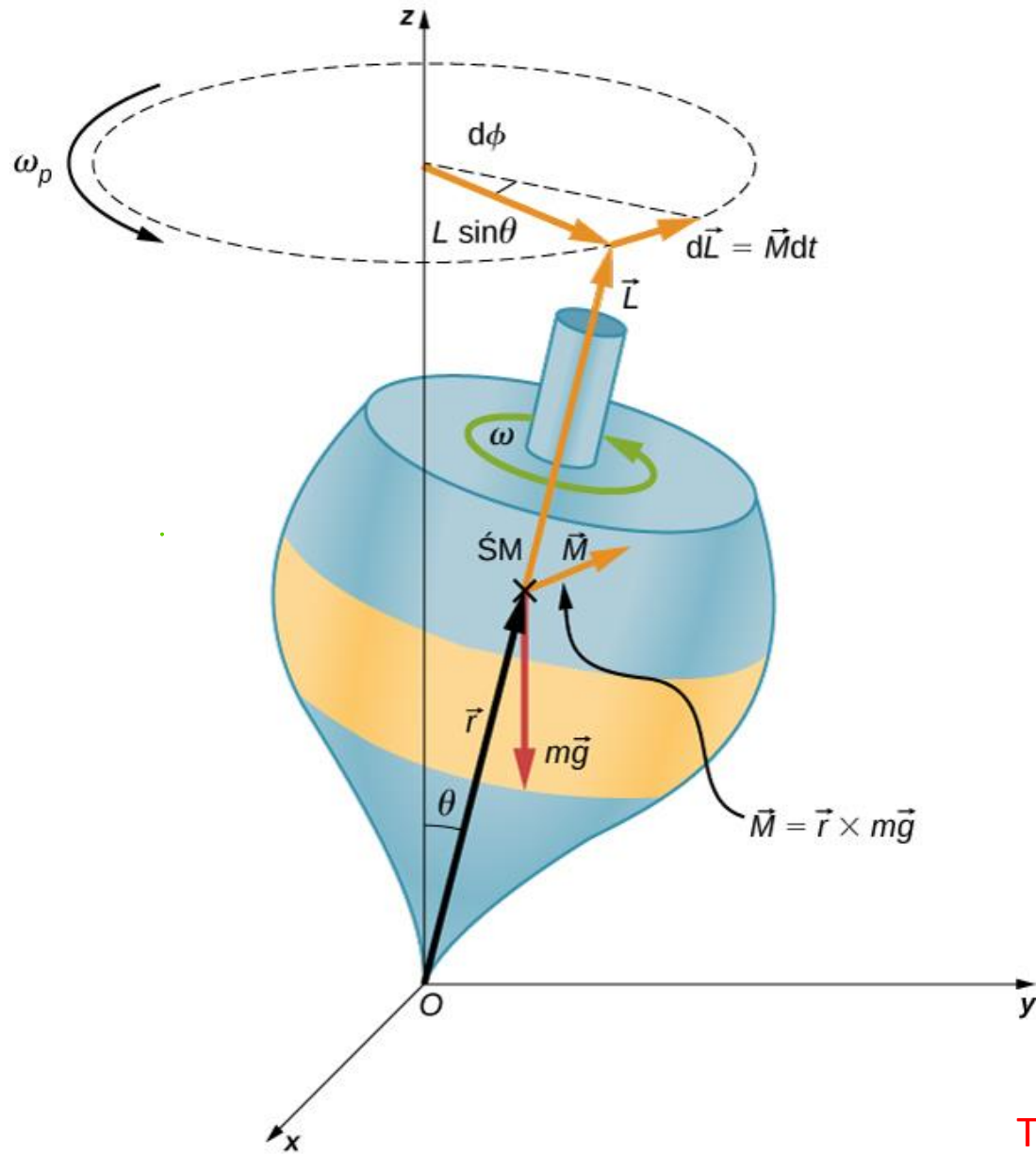
(a)

Jeżeli bączek się nie kręci, to moment siły względem punktu podparcia O powoduje jego przewrócenie.

(b)

Jeżeli bączek obraca się wokół swojej osi OO' , to nie przewraca się, ale porusza się ruchem precesyjnym wokół osi zz .



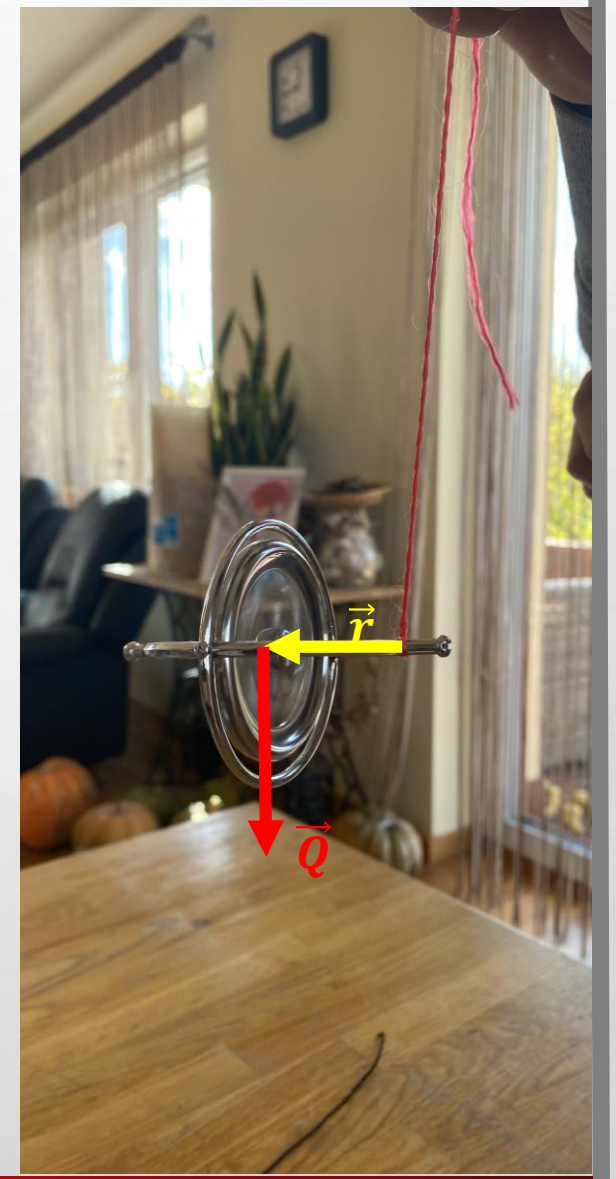


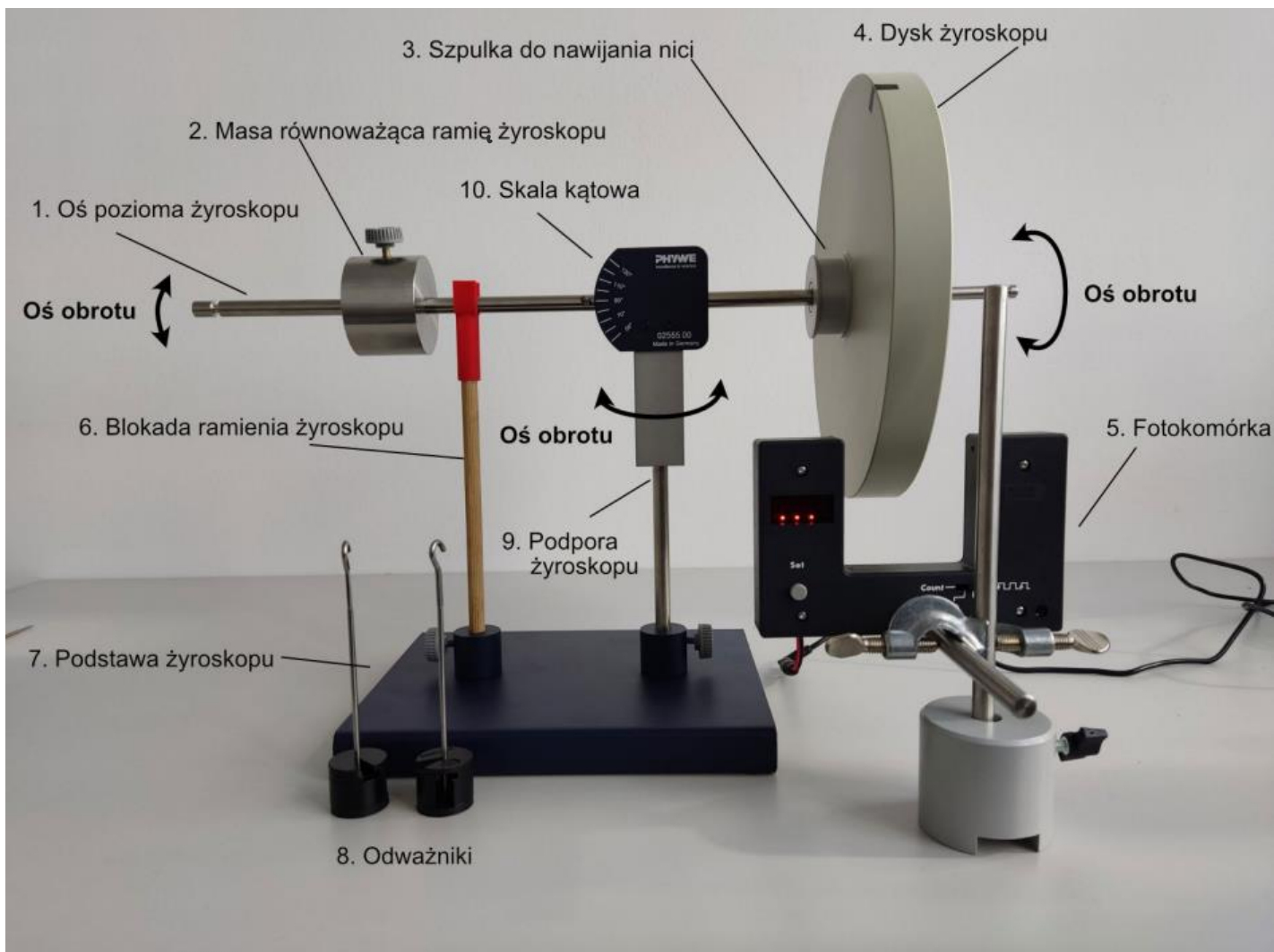
Wypadkowa sił działająca na środek ciężkości wytwarza moment sił \vec{M} w kierunku prostopadłym do wektora momentu pędu \vec{L} . Wartość \vec{L} nie zmienia się, ale kierunek \vec{L} podlega zmianom, a oś symetrii bączka dokonuje precesji wokół osi z .

Treści dostępne za darmo na
<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/11-4-precesja-zyroskopu>



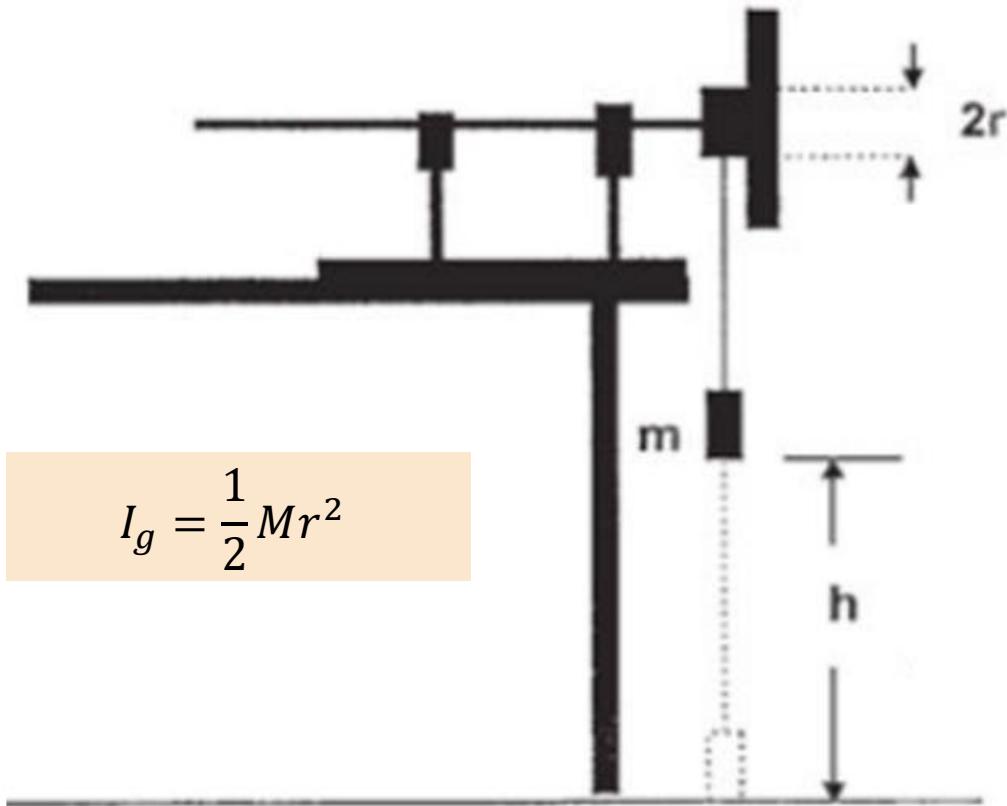






Żyroskop 3-osiowy

Wyznaczanie momentu bezwładności żyroskopu



$$I_g = \frac{1}{2}Mr^2$$

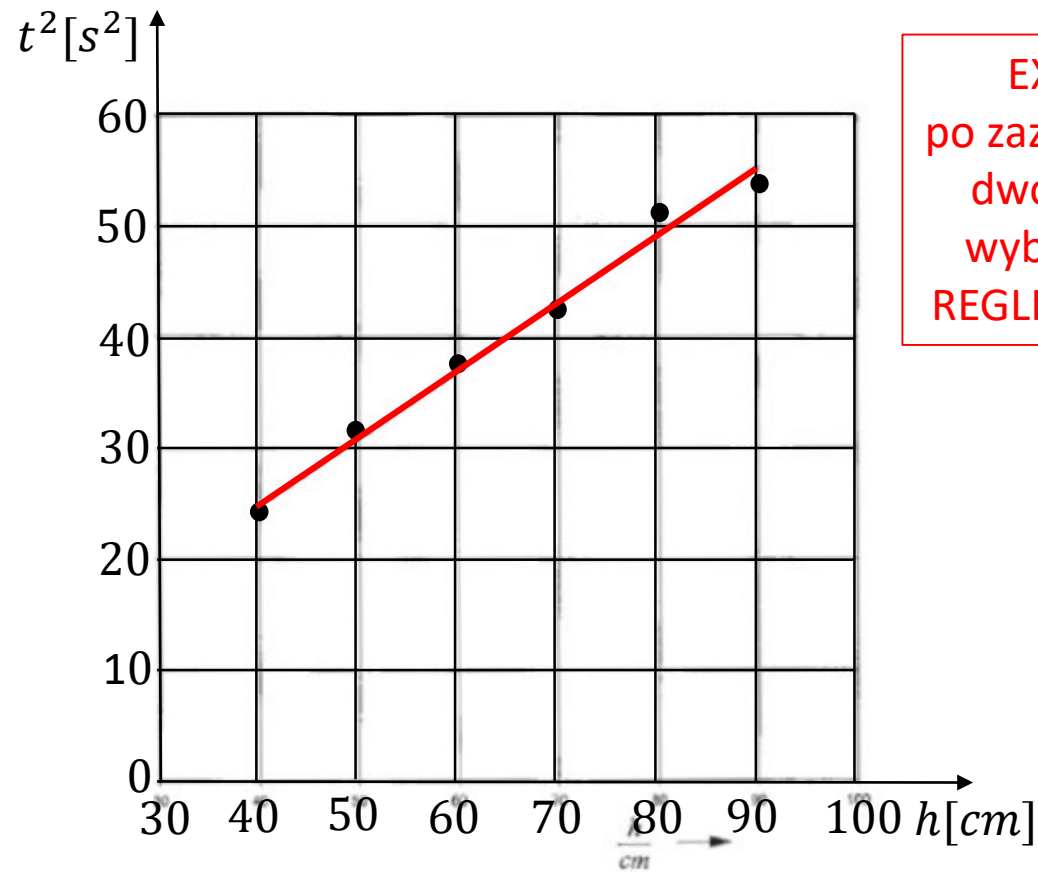
$$I \frac{d\omega_R}{dt} = I\varepsilon = M$$

$$M = Fr \quad F = mg - ma \quad h = \frac{at^2}{2} \quad a = \varepsilon r$$

$$t^2 = \frac{2I + 2mr^2}{mgr^2} h$$

$$t^2 = f(h)$$

Wyznaczanie momentu bezwładności żyroskopu: regresja liniowa

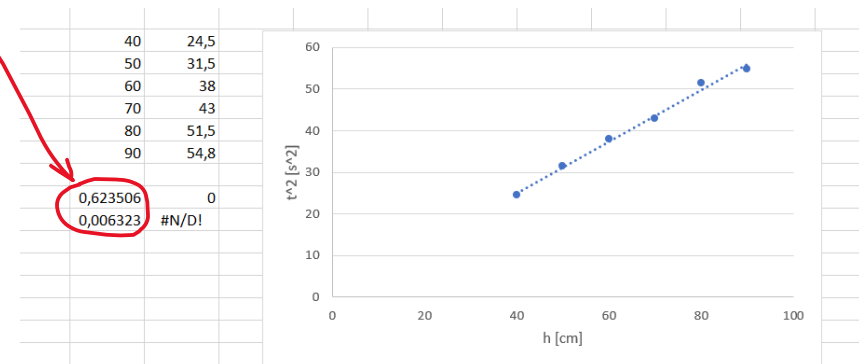


EXCEL:
po zaznaczeniu
dwóch pól
wybieramy
REGLINP (b=0)

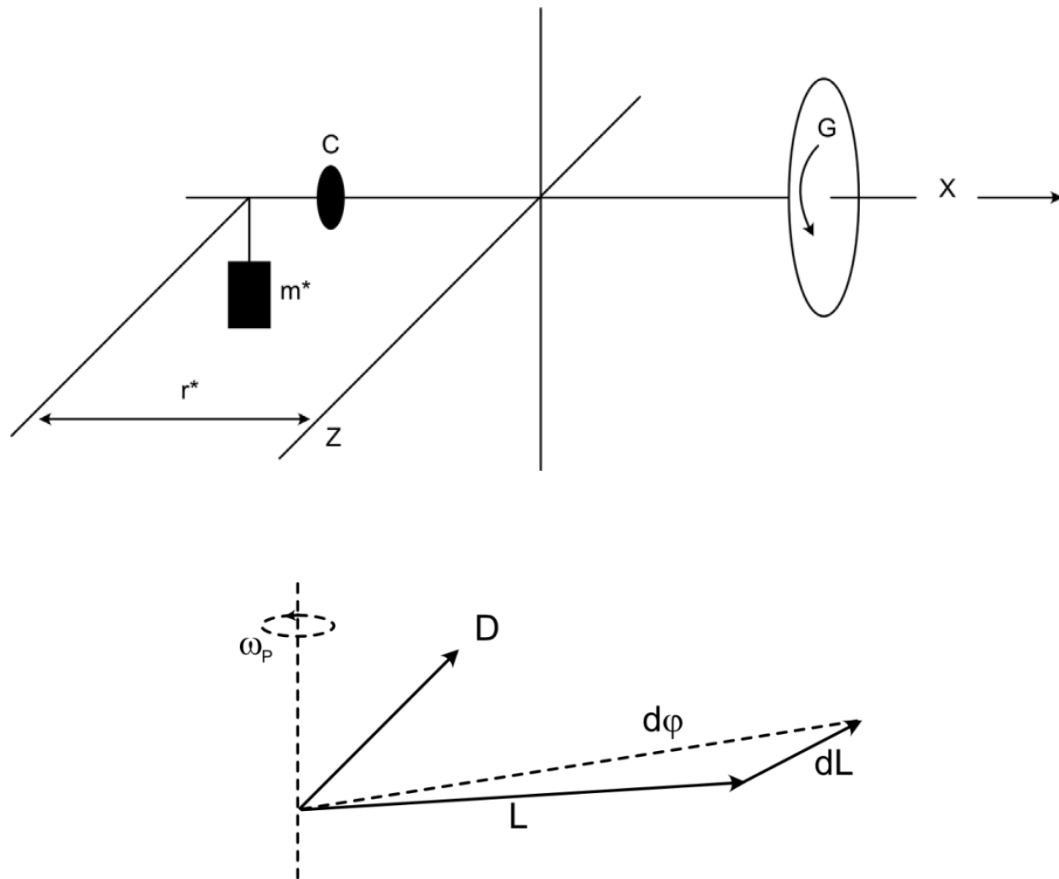
$$\underbrace{t^2}_{y} = \underbrace{\frac{2I + 2mr^2}{mgr^2}}_a \underbrace{h}_x$$

$$y = ax + b \quad b = 0$$

$I = ?$



Wyznaczanie momentu bezwładności żyroskopu



$$L = I\omega_R$$

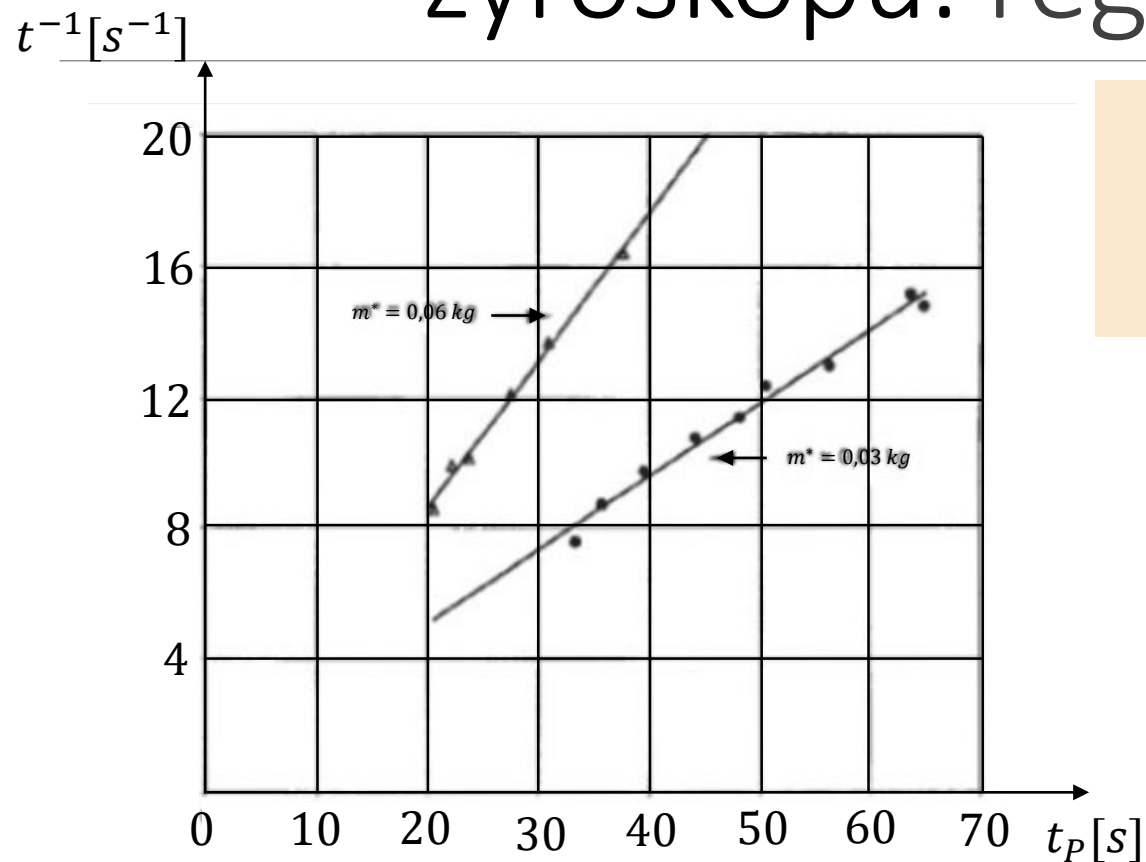
$$M^* = m^*gr^* = \frac{dL}{dt}$$

$$dL = Ld\varphi$$

$$\omega_P = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL}{Ldt} = \frac{dL}{I\omega_R dt} = \frac{m^*gr^*}{I\omega_R}$$

$$\frac{1}{t_P} = \frac{m^*gr^*}{4\pi^2 I} \cdot t \quad \text{lub} \quad \frac{1}{t} = \frac{m^*gr^*}{4\pi^2 I} \cdot t_P$$

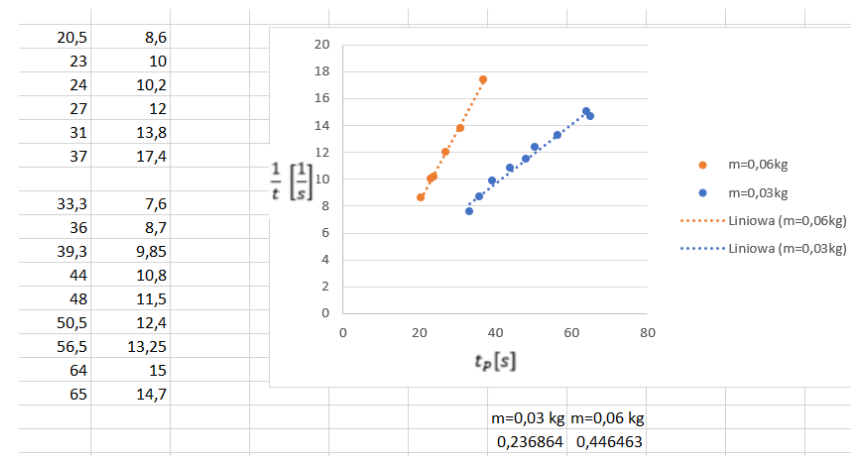
Wyznaczanie momentu bezwładności żyroskopu: regresja liniowa



$$\underbrace{\frac{1}{t}}_y = \underbrace{\frac{m^* g r^*}{4\pi^2 I}}_a \cdot \underbrace{t_P}_x$$

$$y = ax$$

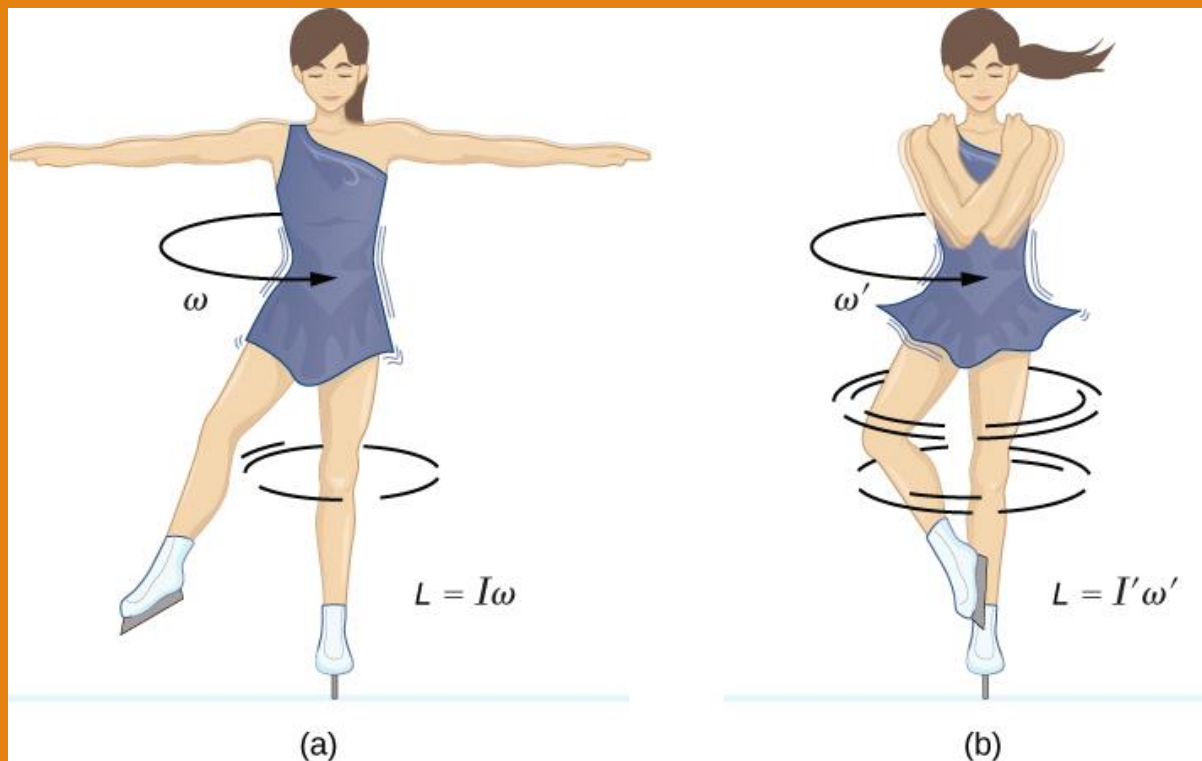
Excel: REGLINP



$$I = \frac{mgr}{4\pi^2 a} = 0,008506 [kg \cdot m^2] = 8,506 \cdot 10^3 [kg \cdot m^2]$$

$$r^* = 0,27m$$

Zasada zachowania momentu pędu



$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$I\omega = I'\omega'$$

Treści dostępne za darmo na

<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/11-3-zasada-zachowania-momentu-pedu>

Energia kinetyczna układu n punktów materialnych (twierdzenie Koeniga)

$$E_k = \sum_{i=1}^n E_{ki} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i v_i^2$$

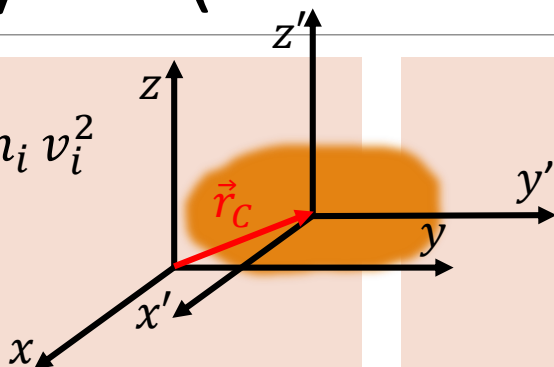
$$\vec{v}_i = \vec{v}_C + \vec{v}_i^w$$

\vec{v}_i – prędkość bezwzględna punktu materialnego (względem układu nieruchomego $OXYZ$)

\vec{v}_i^w – prędkość względna punktu materialnego (względem układu ruchomego $CX'Y'Z'$)

\vec{v}_C – prędkość unoszenia ŚM (prędkość układu $CX'Y'Z'$ względem układu nieruchomego $OXYZ$)

\vec{r}_i – wektor wodzący punktów materialnych względem układu $CX'Y'Z'$



$$E_k = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (\vec{v}_C + \vec{v}_i^w)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i [\vec{v}_C^2 + (\vec{v}_i^w)^2 + 2\vec{v}_C \cdot \vec{v}_i^w] =$$

$$= \frac{1}{2} v_C^2 \underbrace{\sum_{i=1}^n m_i}_m + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n m_i (v_i^w)^2 + \underbrace{\vec{v}_C \cdot \sum_{i=1}^n m_i \vec{v}_i^w}_{=0 \text{ bo } \frac{1}{m} \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i = 0}$$

Energia kinetyczna układu punktów materialnych składa się z energii kinetycznej ruchu postępowego i energii kinetycznej ruchu względnego dookoła środka masy!

Energia kinetyczna bryły sztywnej

Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu postępowym

W ruchu postępowym bryły sztywnej wszystkie jej punkty mają taką samą prędkość!

$$E_k = \frac{1}{2} v^2 \underbrace{\int dm}_M$$

$$E_k = \frac{1}{2} M v^2$$

Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu obrotowym dookoła nieruchomej osi

$$E_{ki} = \frac{1}{2} v^2 dm = \frac{1}{2} r^2 \omega^2 dm$$

E_{ki} – energia kinetyczna elementu bryły sztywnej o masie dm

r – odległość elementu bryły sztywnej o masie dm od osi obrotu

$$E_k = \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int r^2 dm}_I$$

Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu płaskim

W ruchu płaskim wszystkie punkty bryły sztywnej poruszają się w płaszczyznach równoległych do pewnej nieruchomej płaszczyzny zwanej płaszczyzną kierującą. Ruch bryły sztywnej można wówczas analizować badając jeden wybrany jej przekrój np. przechodzący przez ŚM.

Energia kinetyczna bryły sztywnej w ruchu płaskim złożonym z ruchu postępowego z prędkością ŚM i ruchu obrotowego dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny kierującej i przechodzącej przez ŚM

$$E_k = \frac{1}{2} \int \left(\vec{v}_C + \underbrace{\vec{v}^w}_{\omega \times r = \omega r} \right)^2 dm = \frac{1}{2} v_C^2 \underbrace{\int dm}_m + \frac{1}{2} \omega^2 \underbrace{\int r^2 dm}_I + \underbrace{\vec{v}_C \cdot \int \vec{v}^w dm}_{=0}$$

$$E_k = \frac{1}{2} m v_C^2 + \frac{1}{2} I \omega^2$$

Dynamika ruchu postępowego bryły sztywnej (ruch płaski)

$$m\vec{a}_C = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^Z$$
$$m \frac{d^2 x_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^Z \quad m \frac{d^2 y_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^Z \quad m \frac{d^2 z_C}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iz}^Z$$

r.post.
 $\vec{L}_C = 0$

$$\frac{d\vec{L}_C}{dt} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_{iC} = 0$$

W ruchu postępowym bryły sztywnej suma geometryczna momentów \vec{M}_{iC} wszystkich sił zewnętrznych względem ŚM wynosi 0.

W ruchu postępowym bryły sztywnej wypadkowa wszystkich sił zewnętrznych ma kierunek prostej przechodzącej przez jej ŚM!

Dynamika ruchu płaskiego bryły sztywnej

Rozważamy ruch płaski złożony z ruchu postępowego z prędkością $\dot{S}M$ i ruchu obrotowego dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny kierującej i przechodzącej przez $\dot{S}M$.

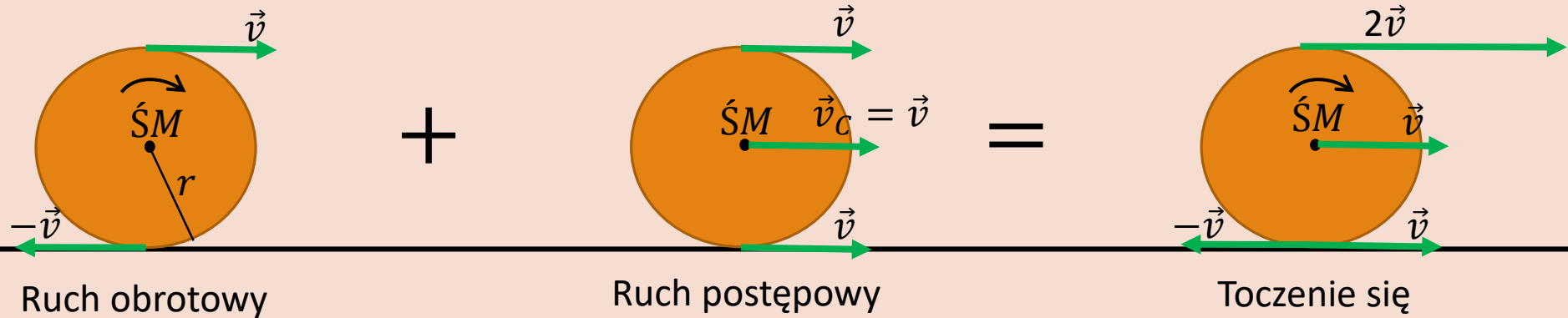
Dla centralnej osi obrotu pokrywającej się z osią Z układu współrzędnych:

$$m \frac{d^2 x_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{ix}^z \quad m \frac{d^2 y_c}{dt^2} = \sum_{i=1}^n F_{iy}^z \quad I \varepsilon = \sum_{i=1}^n M_{iz}$$

ε – przyspieszenie kątowe bryły sztywnej względem osi centralnej

Toczenie się bez poślizgu

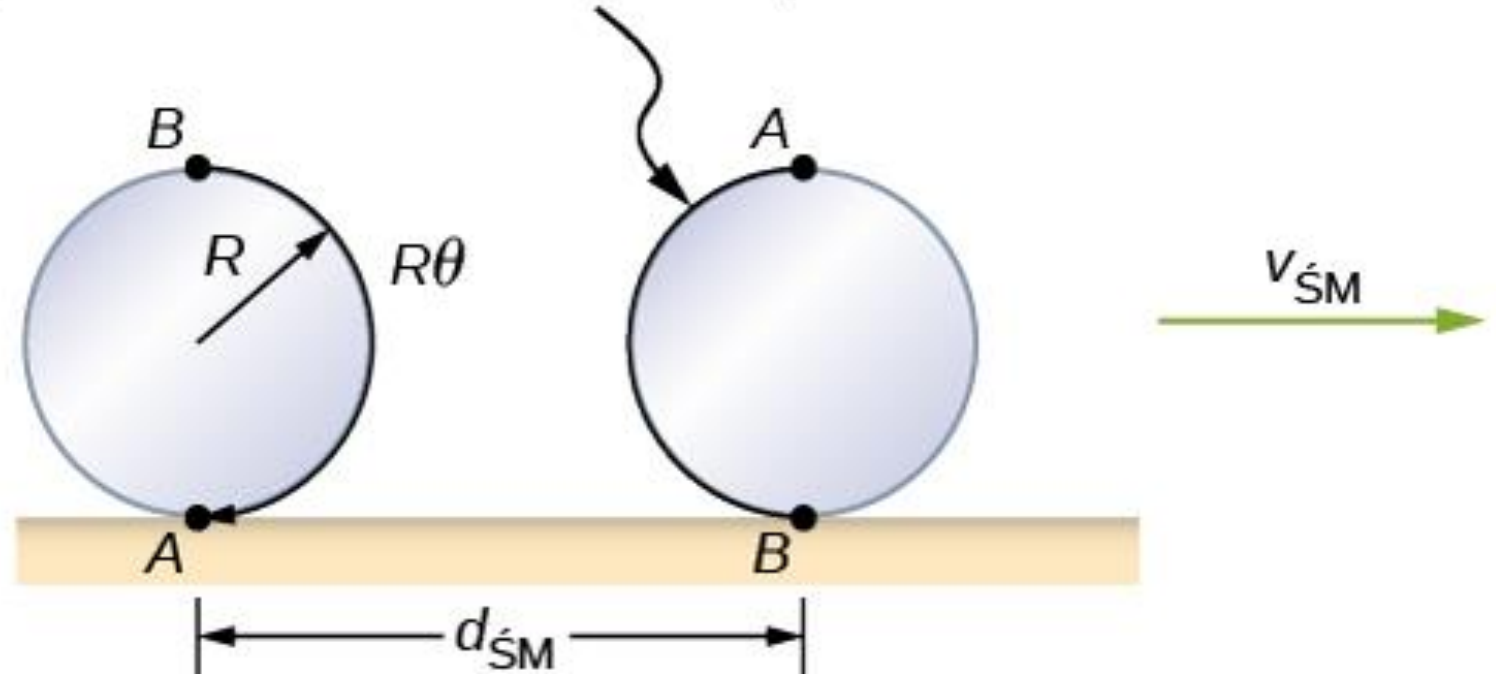
Złożenie ruchu postępowego z ruchem obrotowym to toczenie się.



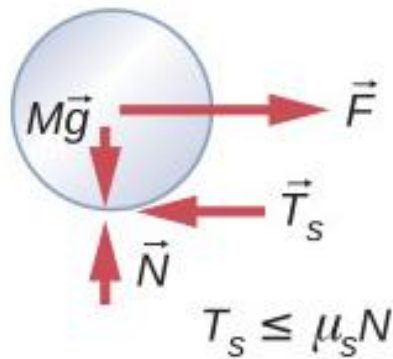
$$v_C = v = \frac{2\pi r}{T} = \omega r$$

Toczenie się bez poślizgu

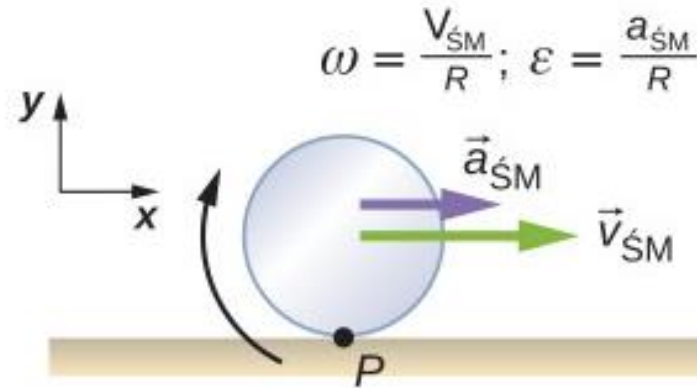
Długość łuku AB odwzorowana na powierzchni koła



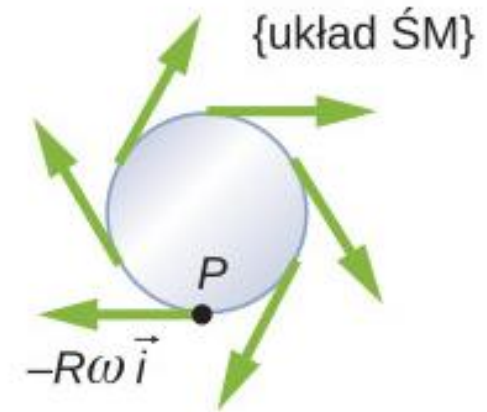
Toczenie się bez poślizgu



(a) Siły działające na koło



(b) Koło toczy się bez poślizgu



(c) Wektor prędkości punktu P ma przeciwny zwrot do prędkości środka masy koła

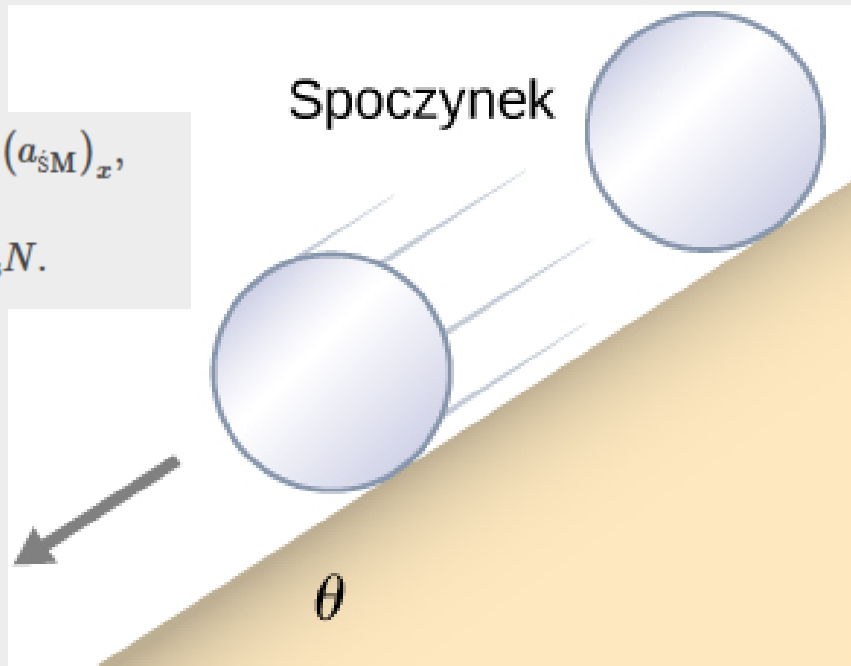
$$\vec{v}_P = -R\omega\vec{i} + v_{SM}\vec{i}$$

$$v_{SM} = R\omega$$

$$a_{SM} = R\epsilon$$

Toczenie się bez poślizgu

$$\begin{aligned}mg \sin \theta - T_s &= m(a_{\dot{S}M})_x, \\ N - mg \cos \theta &= 0, \\ T_s &\leq \mu_s N.\end{aligned}$$



Toczenie się bez poślizgu

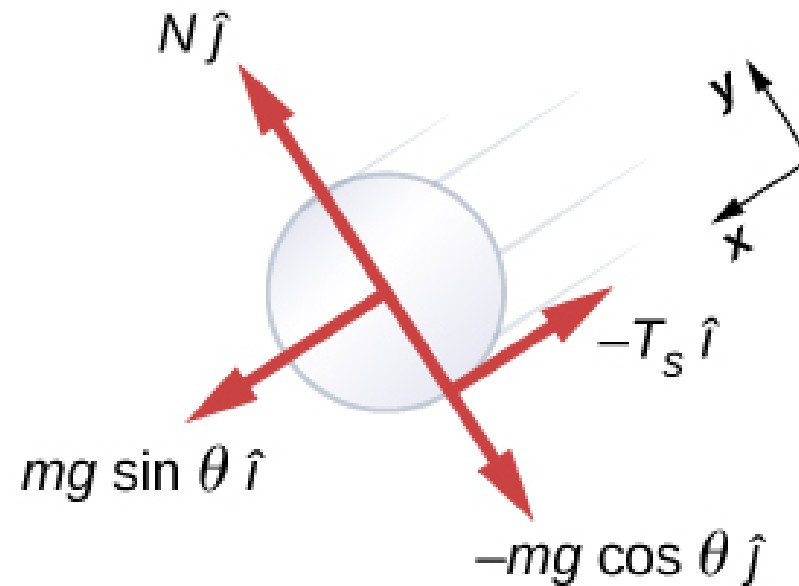
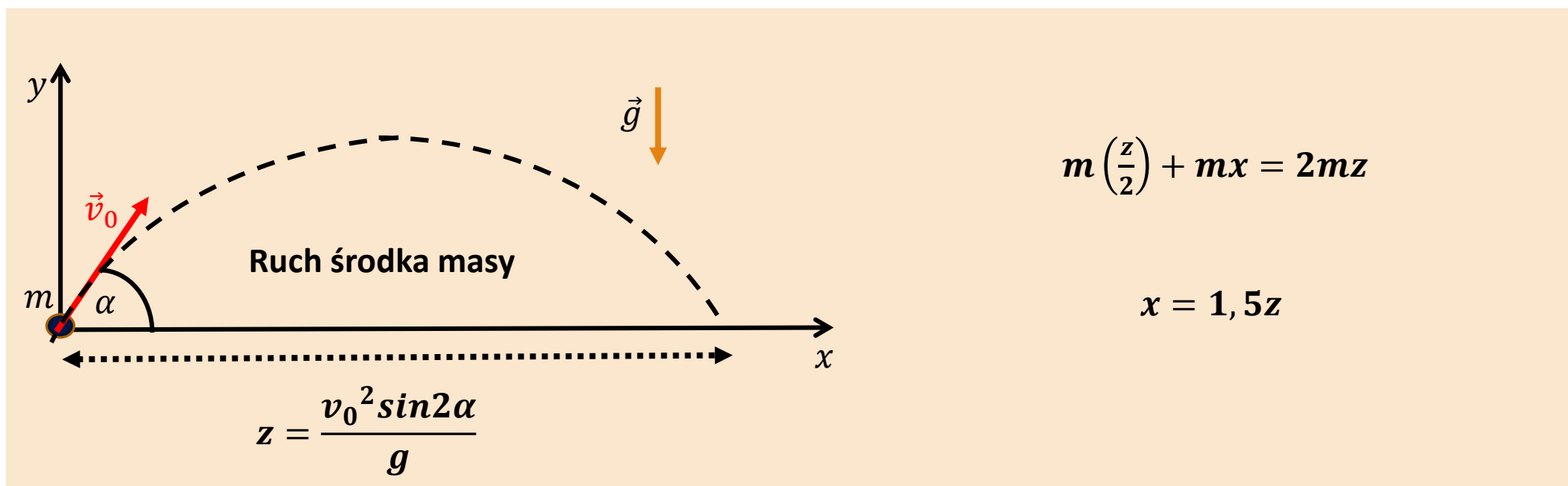


Diagram sił

Przykład: ruch rozpadającego się pocisku

Pocisk zostaje wystrzelony pod kątem α do poziomu z prędkością początkową \vec{v}_0 . W najwyższym punkcie toru pocisk rozpada się na dwie części o równych masach. Jeżeli wiadomo, że jedna część pocisku spadnie pionowo w dół – obliczyć gdzie spadnie druga część pocisku?



Przykłady

Zad. 1.

Obliczyć prędkości v_t kuli, obręczy i pełnego walca (wszystkie o masie m) staczających się z równi pochyłej o wysokości h , a następnie porównać je z prędkościami v_z tych ciał zsuwających się z równi pochyłej bez tarcia. Wszystkie prędkości wyznaczyć dla ciał znajdujących się na końcu równi.

Zad. 2.

Obliczyć, o ile różni się energia kinetyczna ruchu postępowego od energii kinetycznej ruchu obrotowego dla toczących się po poziomej powierzchni, bez poślizgu: obręczy, pełnego walca i kuli.

Zad. 3.

Obliczyć przyspieszenie (liniowe i kątowe) walca o masie m i promieniu r staczającego się bez poślizgu z równi pochyłej bez prędkości początkowej. Jaki musi być współczynnik tarcia, aby walec staczał się bez poślizgu? Co zmieniłoby się gdyby walec staczał się z poślizgiem?

Literatura

1. I. W. Sawieliew, KURS FIZYKI T. 1 „Mechanika”, „Fizyka cząsteczkowa”, PWN, W-wa 1987 (lub nowsze wydania).
2. L. D. Landau, E. M. Lifszyc, Krótki kurs fizyki teoretycznej T. 1, PWN, W-wa 1980 (lub nowsze wydania).
3. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki T. 1, PWN, W-wa 1984 (lub nowsze wydania).
4. A. Piekara, Mechanika ogólna, PWN, W-wa 1975 (lub nowsze wydania).
5. W. Moebis, S. J. Ling, J. Sanny , Fizyka dla szkół wyższych Tom I, ISBN-13: 978-83-948838-1-2
<https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1>
6. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki 1, PWN, W-wa 2011 (lub inne wydania).