Wektory – przykłady zastosowania w fizyce

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Podstawowe modele matematyczne

1. Skalary (np. czas, droga, długość, objętość, temperatura, masa, energia)
2. Wektory (np. siła, prędkość, przyspieszenie)
3. Tensory (np. tensor momentu bezwładności, tensor naprężeń)
4. Funkcje (np. zależność wychylenia od czasu w ruchu drgającym)

Wektory a przestrzeń liniowa

Przestrzeń liniowa $(V,+,K,\cdot) \equiv V -$ to zbiór obiektów (np. **wektorów**), które można skalować (mnożyć przez elementy z **ciała liczbowego** $\boldsymbol{K}$) i dodawać.

Działania mnożenia $(" \cdot ": K \times V \to V)$ i dodawania $(" + ": \mathrm{V} \times V \to V)$ elementów przestrzeni liniowej spełniają następujące aksjomaty:

1) $\bigwedge_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v},\boldsymbol{w} \in V} \quad \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (łączność)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$[x_1, y_1]+[x_2 + x_3, y_2 + y_3] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] + [x_3, y_3] = [x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3]$$

Przestrzeń liniowa

2) $\bigwedge_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V} \quad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (przemienność)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$[x_1, y_1]+[x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_2, y_2]+[x_1, y_1] = [x_2 + x_1, y_2 + y_1]$$

3) $\bigvee_{e \in V} \quad \bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} \quad \boldsymbol{e}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{v}$ (element neutralny w przestrzeni V)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$[0,0] + [x, y]=[\mathrm{x}, y]$$

Przestrzeń liniowa

4) $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} \bigvee_{\boldsymbol{v}' \in V} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}$ (element odwrotny)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$[x, y] + [-\mathrm{x}, -\mathrm{y}] = [-x, -y] + [x, y] = [0,0]$$

Zbiór $(V, +)$ spełniający powyższe 4-ry aksjomaty tworzy **grupę abelową.**

Przestrzeń liniowa

5) $\bigwedge_{\substack{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V \\ \alpha \in K}} \alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$ (rozdzielność mnożenia przez skalar wzg. dodawania)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha[x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2] = \alpha[x_1, y_1]+\alpha[x_2, y_2]$$

6) $\bigwedge_{\substack{\boldsymbol{v} \in V \\ \alpha,\beta \in K}} (\alpha+\beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$ (rozdzielność mnożenia przez wektor wzg. dodawania)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$(\alpha+ \beta)[x, y] = [\alpha\mathrm{x}+\beta\mathrm{x},\alpha\mathrm{y}+\beta\mathrm{y}] = [(\alpha + \beta)\mathrm{x}, (\alpha + \beta)\mathrm{y}]=[\alpha\mathrm{x},\alpha\mathrm{y}]+[\beta x, \beta y]=\alpha[\mathrm{x},\mathrm{y}]+\beta[x, y]$$

Przestrzeń liniowa

7) $\bigwedge_{\substack{\boldsymbol{v} \in V \\ \alpha, \beta \in K}} \alpha(\beta \boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$ (zgodność mnożenia przez skalar z mnożeniem skalarów)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha\,(\beta[x, y]) = \alpha[\beta x, \beta y] = [\alpha\beta x, \alpha\beta y] = \alpha\beta[x, y]$$

8) $\bigvee_{1 \in K} \bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} 1v = v$ (1 to element neutralny w ciele K)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$1[x, y] = [1x, 1y] = [x, y]$$

Ciało liczbowe K

Ciało liczbowe $(K,+,\cdot) \equiv K$ posiada dwa działania $(" + ": K \times K \to K\ ," \cdot ": K \times K \to K)$, i co najmniej dwuelementowy zbiór *K*, gdzie zachodzi:

1) $(K,+)$ – grupa abelowa, (0 to element neutralny)

2) $(K\backslash\{0\},\cdot)$ – grupa (gdy abelowa to mamy ciało przemienne),

3) drugie działanie jest rozdzielne względem pierwszego

Ciałami są np. liczby wymierne, liczby zespolone, liczby rzeczywiste.

Podprzestrzeń przestrzeni liniowej

Podprzestrzeń liniową $(U,+,K,\cdot) \equiv U$ tworzy niepusty podzbiór $U \subset V$ przestrzeni liniowej $(V,+,K,\cdot) \equiv V$, który sam jest przestrzenią liniową z działaniami „dziedziczonymi” z przestrzeni V, tzn.

$$\bigwedge_{c \in K} \quad \bigwedge_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in U} \quad c\boldsymbol{u} \in U, \quad \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} \in U$$

Przestrzeń wektorowa

Przestrzeń wektorowa $(V, +, \mathbb{R}, \cdot) \equiv V$ to przestrzeń liniowa, która posiada skończenie wymiarowy układ **liniowo niezależnych** generatorów $\boldsymbol{e_{1,}}\, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n} \in V$ zwany **bazą**

$$\{\boldsymbol{e_{1,}}\, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\} \equiv \{\boldsymbol{e_i}\}_{\boldsymbol{i \in \tilde{n}}}$$

wówczas przestrzeń wektorową V oznaczamy następująco:

$$\boldsymbol{V = lc_K\{e_{1,}\, e_2, \dots, e_n\} \equiv lc_K\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}}$$

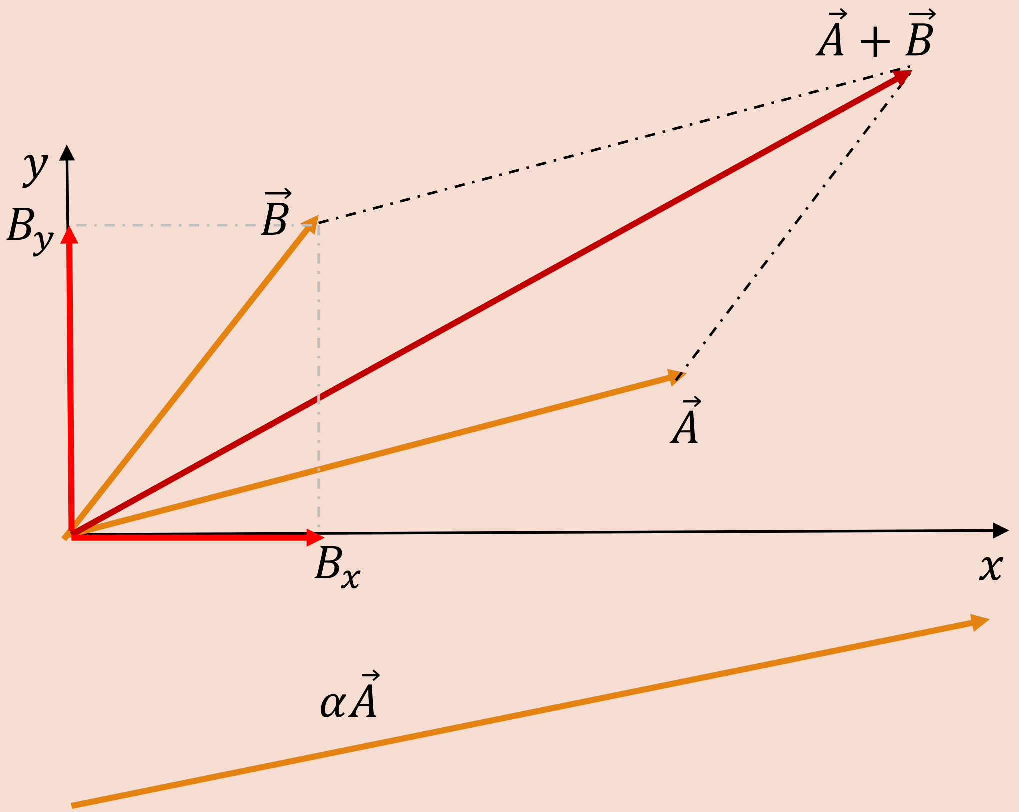
Liczbę elementów bazy nazywamy **wymiarem** przestrzeni V i oznaczamy: $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{V = n}$.

Układ wektorów $\boldsymbol{v_{1,}}\, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$ (elementów przestrzeni wektorowej), $n \geq 2$, jest liniowo niezależny jeżeli dla $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ ze związku $\sum_{i=1}^{n} c_i\, \boldsymbol{v_i} = 0$ wynika, że: $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

Przedstawienia wektora

Przykład: $\mathbb{R}^2$ $(n = 2)$

Geometryczne przedstawienie wektora



Algebraiczne przedstawienie wektora

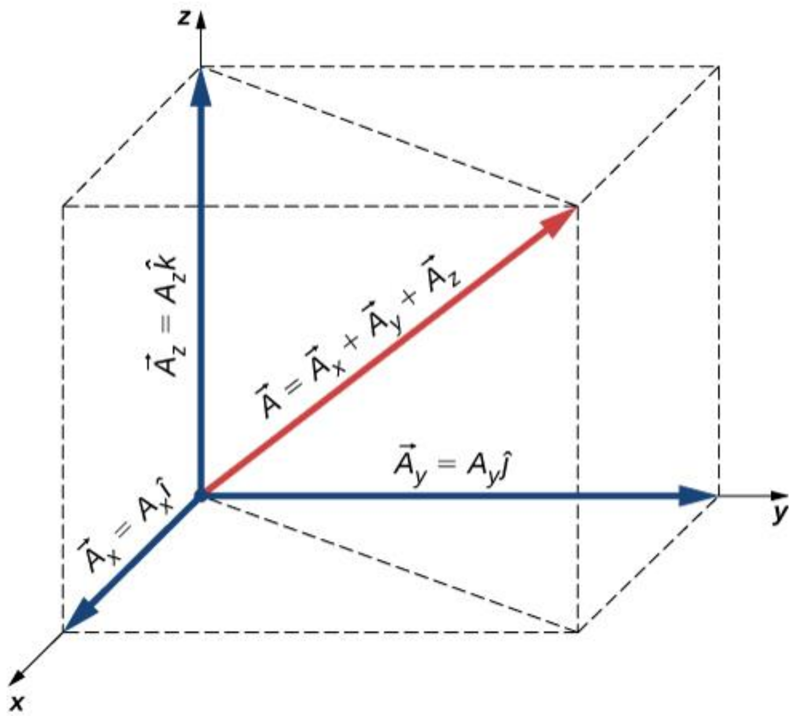
$$\vec{A} = [A_x, A_y], \quad \vec{B} = [B_x, B_y]$$

$$\vec{A} + \vec{B} = [A_x + B_x, A_y + B_y]$$

$$\alpha\vec{A} = [\alpha A_x, \alpha A_y]$$

Przedstawienia wektora

Przykład: $\mathbb{R}^3$ $(n = 3)$



Trzy wektory jednostkowe definiują układ współrzędnych kartezjańskich w przestrzeni trójwymiarowej. Od kolejności podpisywania osi zależy orientacja układu współrzędnych. Układ przedstawiony na rysunku jest układem prawoskrętnym.

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej jest sumą swoich składowych.

Treści dostępne za darmo na:
https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/2-2-uklady-wspolrzednych-i-skladowe-wektora

Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny na przestrzeni liniowej $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ to odwzorowanie

$$\langle * \mid * \rangle : V \times V \ni (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{w} \rangle \in \mathbb{R},$$

spełniające dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ następujące warunki:

$$\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{v} \rangle, \quad \langle \alpha \boldsymbol{v} | \boldsymbol{w} \rangle = \alpha \langle \boldsymbol{w} | \boldsymbol{v} \rangle,$$

$$\langle \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} | \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u} | \boldsymbol{w} \rangle + \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{w} \rangle, \quad \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} \rangle \in \mathbb{R}_{\boldsymbol{0}}^{+},$$

$$\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{v} \rangle = \boldsymbol{0} \Rightarrow \boldsymbol{v} = \boldsymbol{0},$$

gdzie (**iloczyn kartezjański** zbiorów V_1 i V_2): $V_1 \times V_2 \overset{def}{=} \{(\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}) \mid \boldsymbol{v_1} \in V_1 \wedge \boldsymbol{v_2} \in V_2\}$,

Baza ortogonalna i ortonormalna

Baza $\{\boldsymbol{e_i}\}_{\boldsymbol{i}\in\tilde{\boldsymbol{n}}}$ jest:

ortogonalna gdy: $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} \equiv \langle \boldsymbol{e_i} | \boldsymbol{e_j} \rangle = \boldsymbol{c_i \delta_{ij}}; c_i \neq 0; i, j \in \tilde{n}$

ortonormalna gdy: $\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{i}} \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{j}} \equiv \langle \boldsymbol{e_i} | \boldsymbol{e_j} \rangle = \boldsymbol{\delta_{ij}};\ \boldsymbol{i, j} \in \tilde{\boldsymbol{n}}$

Delta Kroneckera:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{gdy } i = j \\ 0, \text{gdy } i \neq j \end{cases} \quad ; i, j \in \tilde{n}$$

Iloczyn skalarny wektorów w $\mathbb{R}^{\mathbf{3}}$

Przestrzeń liniową wyposażoną w iloczyn skalarny nazywamy **unitarną**.

$\mathbb{R}^3 = lc_{\mathbb{R}}\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ - **rzeczywista przestrzeń kartezjańska *3* – wymiarowa**

(przestrzeń wektorowa, unitarna z bazą ortonormalną)

$$V \times V \ni (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) \mapsto \langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{w} \rangle = (v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3) \in \mathbb{R}$$

$$\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{w} \rangle \equiv \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{vw} \cos \sphericalangle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$$

gdzie $\boldsymbol{v} = v_1 \boldsymbol{i} + v_2 \boldsymbol{j} + v_3 \boldsymbol{k} \equiv [v_1, v_2, v_3], \boldsymbol{w} = w\boldsymbol{e}_{\boldsymbol{w}} = w_1 \boldsymbol{i} + w_2 \boldsymbol{j} + w_3 \boldsymbol{k} \equiv [w_1, w_2, w_3],$

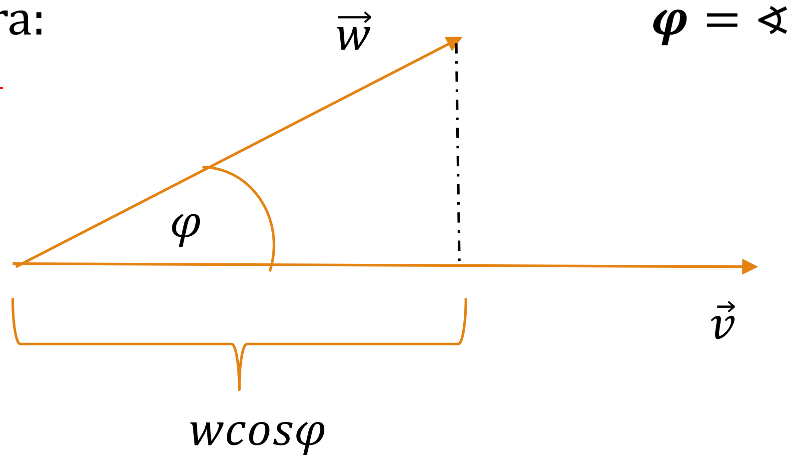
$$\boldsymbol{v} \equiv \vec{v}, \boldsymbol{w} \equiv \vec{w}, v \equiv |\vec{v}|, w \equiv |\vec{w}|, \vec{\imath} \equiv \boldsymbol{i}, \ \vec{\jmath} \equiv \boldsymbol{j}, \ \vec{k} \equiv \boldsymbol{k}$$

Interpretacja geometryczna iloczynu skalarnego wektorów w $\mathbb{R}^3$

$$\vec{v}\cdot\vec{w} \equiv \langle \boldsymbol{v}|\boldsymbol{w}\rangle = v\,w\cos\sphericalangle(\boldsymbol{v},\boldsymbol{w}),$$ gdzie moduł wektora: $|\boldsymbol{v}| \equiv v$

$v = \sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2+(v_3)^2}$, ogólnie w $\mathbb{R}^n$: $v = \sqrt{(v_1)^2+(v_2)^2+\ldots+(v_n)^2}$

Dla każdego wektora:
$\boldsymbol{\vec{v}} = v\boldsymbol{\vec{e}}_v,\quad |\boldsymbol{e}_v| = 1$



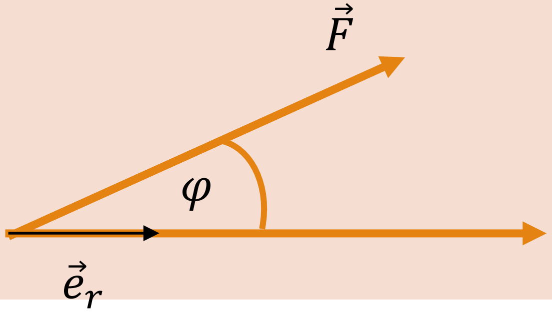
$\boldsymbol{\varphi} = \sphericalangle(\vec{v},\vec{w})$ - kąt między wektorami $\vec{v}$ i $\vec{w}$

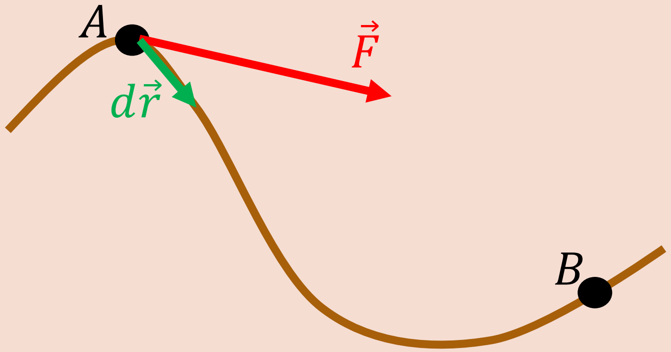
Wybrane zastosowania iloczynu skalarnego: praca siły

<u>Praca W siły $\vec{F}$ na drodze $\overrightarrow{\Delta r}$</u>

$$\boldsymbol{W} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\Delta r}} = |\vec{\boldsymbol{F}}||\overrightarrow{\boldsymbol{\Delta r}}| \cos\sphericalangle(\vec{\boldsymbol{F}}, \overrightarrow{\boldsymbol{\Delta r}})$$

$$\overrightarrow{\Delta r} = |\overrightarrow{\Delta r}|\vec{e}_r \equiv \Delta r \vec{e}_r \qquad \sphericalangle(\vec{F}, \overrightarrow{\Delta r}) \equiv \varphi$$



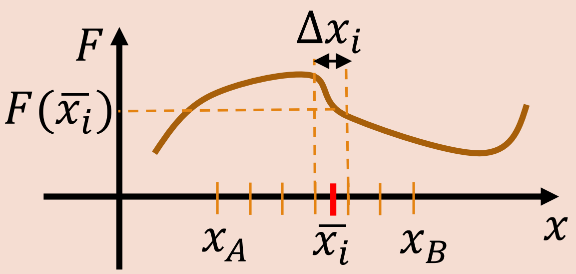


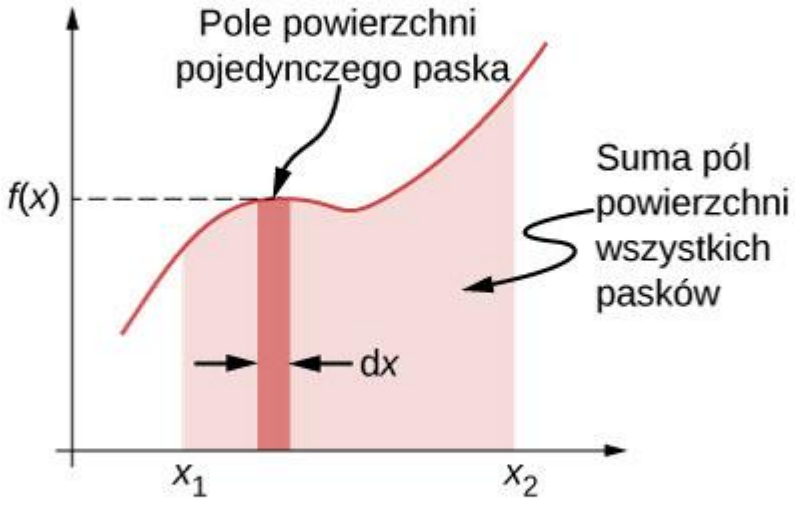
$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$\Delta W = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

Wybrane zastosowania iloczynu skalarnego: praca siły zależnej od x

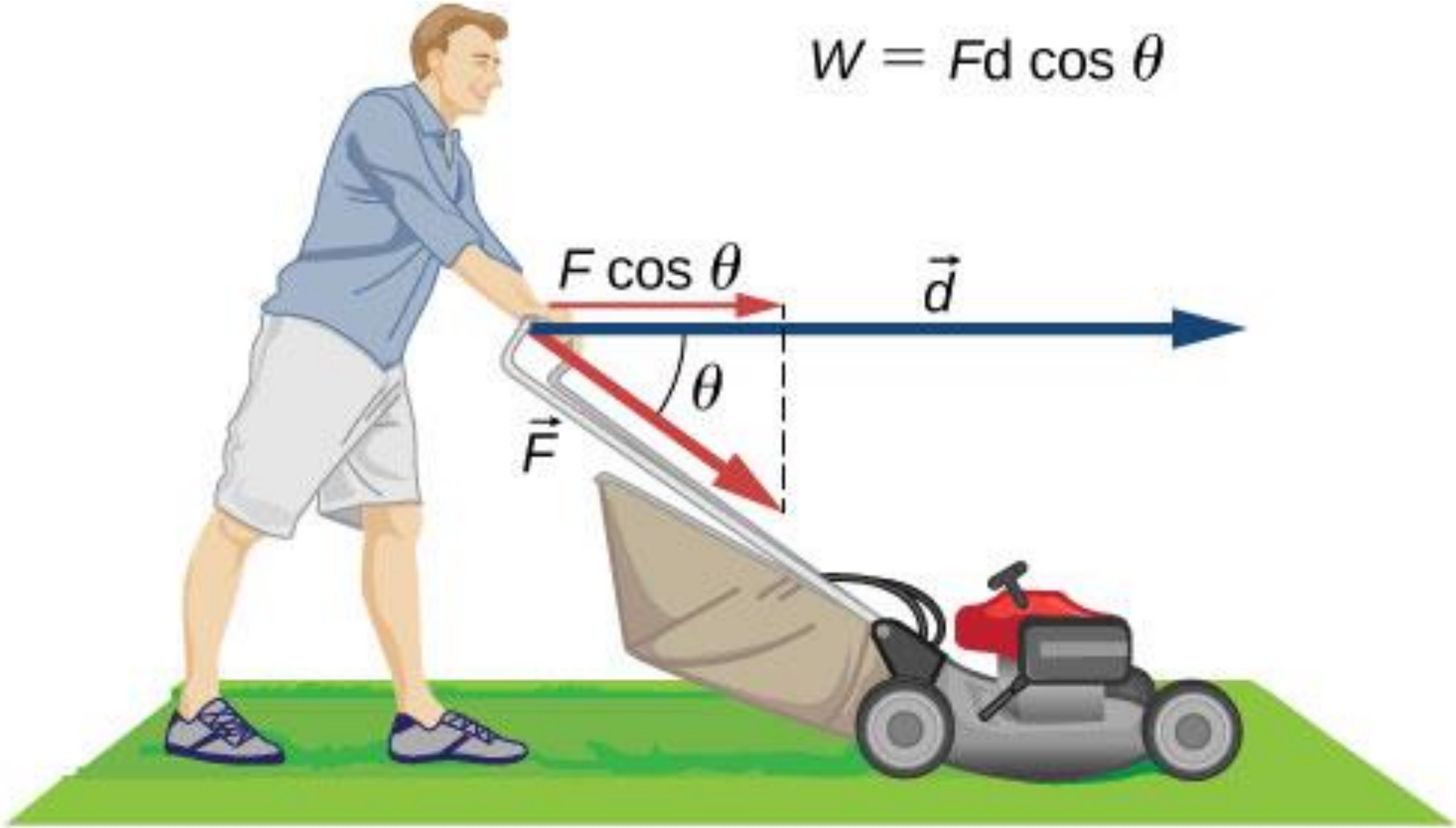
$$\boldsymbol{W = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F(\overline{x}_i)\Delta x_i}$$





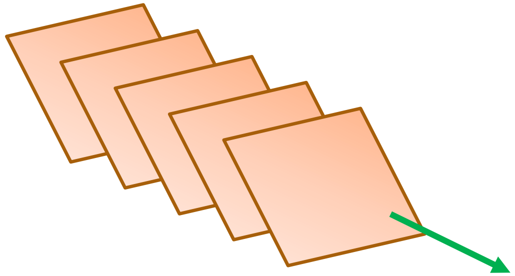
Treści dostępne za darmo na:
https://openstax. org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/7-1-praca

Praca stałej siły

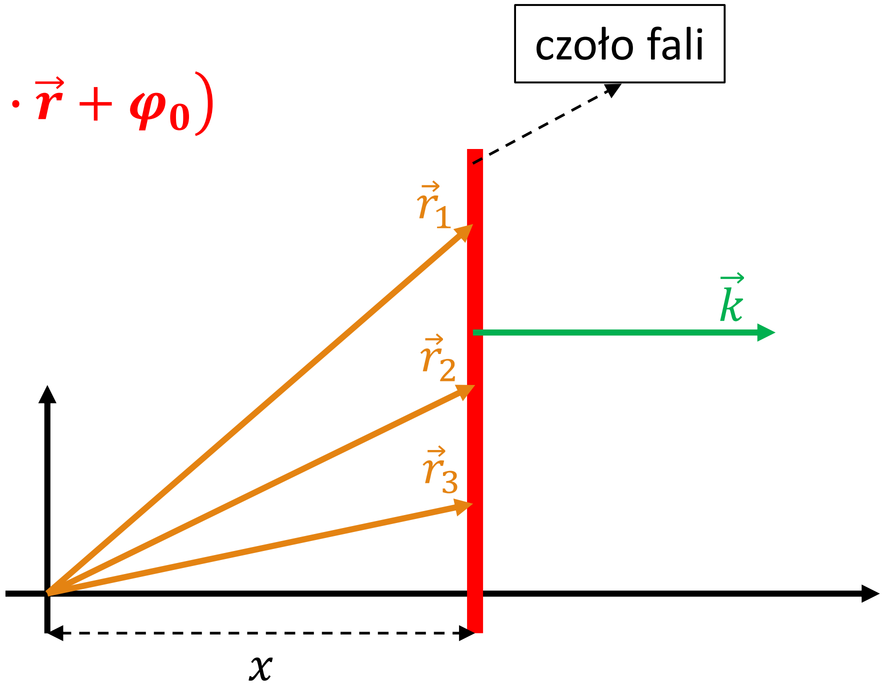


Treści dostępne za darmo na:
https://openstax. org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/7-1-praca

Wybrane zastosowania iloczynu skalarnego: fala płaska



$$s(\vec{r},t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)$$



ω – częstość kołowa w $\left[\frac{1}{s}\right]$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\vec{k}$ - wektor falowy, $\left|\vec{k}\right| = \frac{2\pi}{\lambda}$

λ – długość fali

$\vec{r}$ - wektor wodzący punktu drgającego

φ_0 - faza początkowa (wielkość niemianowana)

$$\vec{k}\cdot\vec{r}_i = kx$$

Macierze

Macierz A o rozmiarze $m \times n$ (m wierszy, n kolumn):

$$\left[a_{ij}\right]_{mn} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv A, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Mnożenie macierzy przez liczbę $\alpha \in K$:

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dodawanie macierzy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy

Mnożyć można wyłącznie macierze, z których pierwsza ma tyle kolumn, co druga wierszy.

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{c_{i,j}} = \sum_{\boldsymbol{r=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a_{i,r} b_{r,j}}$$

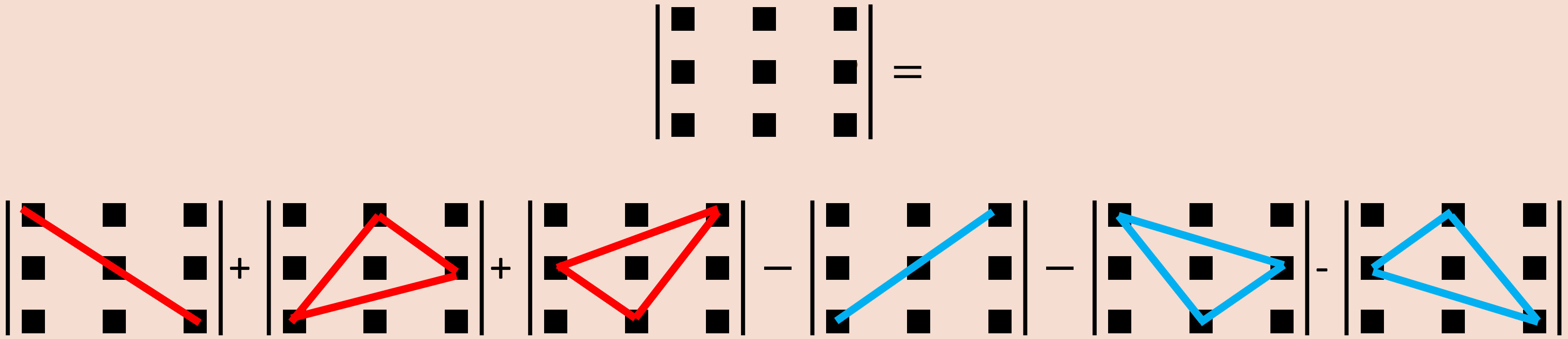
$$i = 1, \dots, n \qquad j = 1, \dots, p$$

m – ilość kolumn w macierzy A równa ilości wierszy w macierzy B

n – ilość wierszy w macierzy A

p – ilość kolumn w macierzy B

Wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia 3



Reprezentacja macierzowa wektorów

Baza kanoniczna w $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{w} \rangle = \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{w}$$

Dla $A \equiv \left[a_{ij}\right]_{mn}$; $A^T \equiv \left[a_{ij}\right]_{nm}$

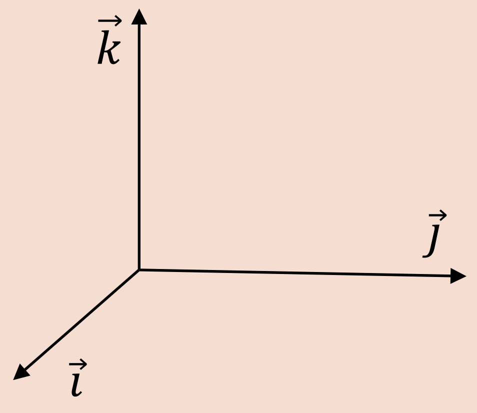
$$\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v^T} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix}$$

$$\langle \boldsymbol{v} | \boldsymbol{w} \rangle = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} =$$

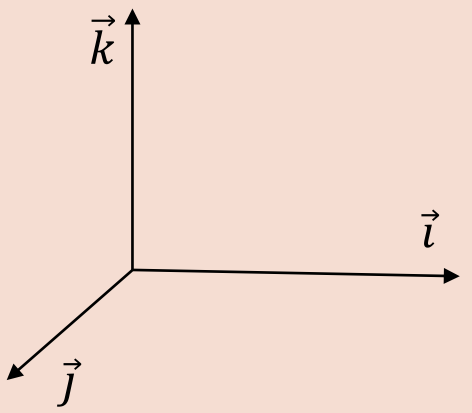
$$= v_1\, w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

Przestrzeń zorientowana

Przestrzeń z zadanym układem współrzędnych jest **zorientowana**!



Układ zorientowany w prawo



Układ zorientowany w lewo

Iloczyn wektorowy ($\mathbb{R}^3$)

Dla dwóch niewspółliniowych wektorów $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{e}_v$ i $\boldsymbol{w} = w\boldsymbol{e}_w$ iloczyn wektorowy

definiuje się jako wektor:

$$\boldsymbol{u} = u\boldsymbol{e}_u = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{i}(\boldsymbol{v}_2 w_3 - \boldsymbol{v}_3 w_2) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{v}_3 w_1 - \boldsymbol{v}_1 w_3) + \boldsymbol{k}(\boldsymbol{v}_1 w_2 - \boldsymbol{v}_2 w_1)$$

o długości:

$$u = |\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}| = v\, w\, sin\sphericalangle(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}).$$

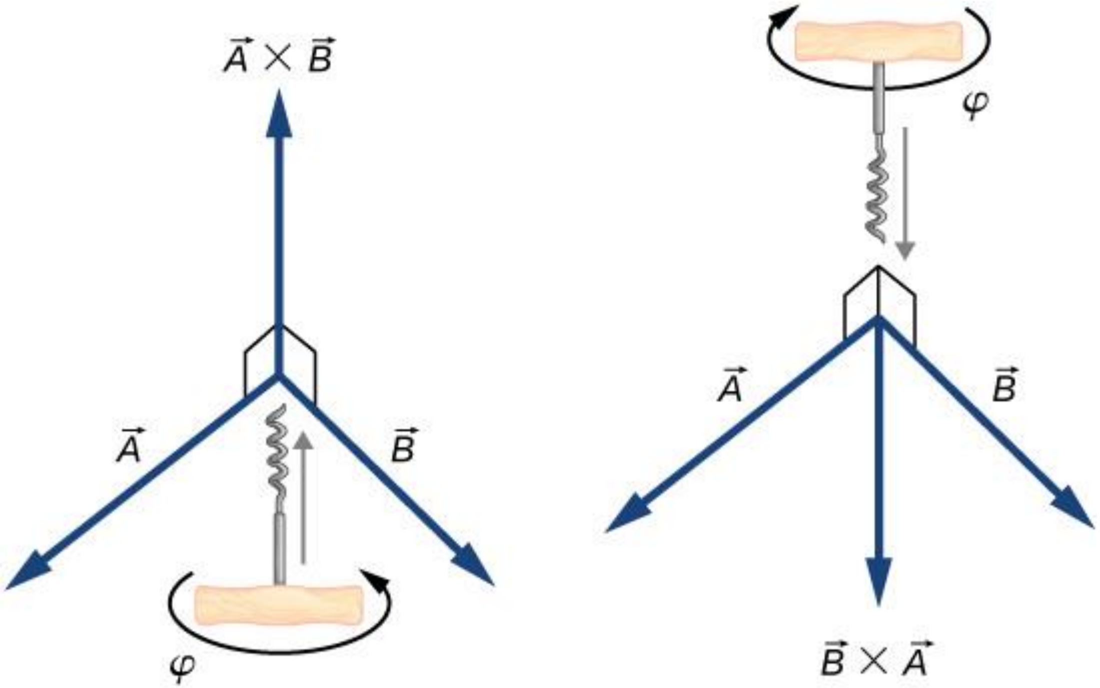
Wektor $\boldsymbol{u}$ jest wektorem normalnym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$, o zwrocie takim, że trójka $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})$ ma orientację zgodną z orientacją przestrzeni.

Własności iloczynu wektorowego dla dowolnych $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ i $c \in \mathbb{R}$:

$$\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{u} \times (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{w}$$

$$(c\boldsymbol{v}) \times \boldsymbol{w} = c(\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}), \qquad \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \boldsymbol{v} \parallel \boldsymbol{w}$$

Reguła korkociągu



Treści dostępne za darmo na:
https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/2-2-uklady-wspolrzednych-i-skladowe-wektora

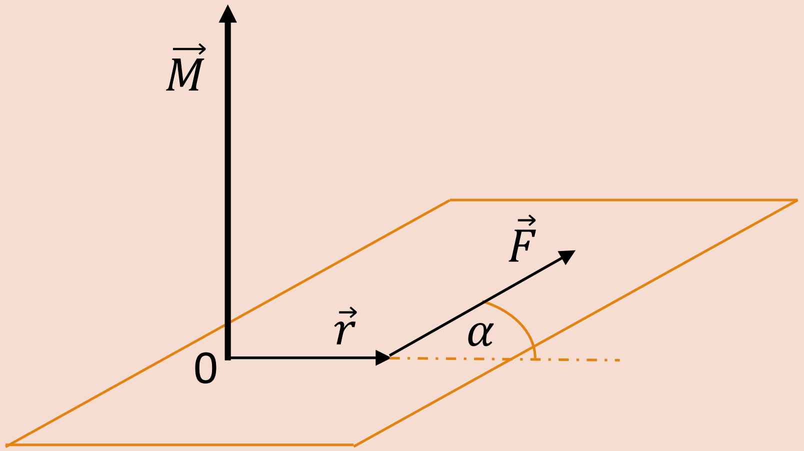
Wybrane zastosowania iloczynu wektorowego (wektory osiowe)

Moment siły $\vec{M}$ względem punktu 0

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$$

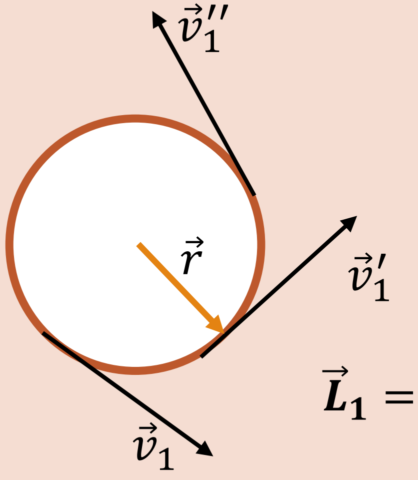
$\vec{\boldsymbol{F}}$ **- siła**

$$|\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}| = |\vec{\boldsymbol{r}}||\vec{\boldsymbol{F}}| \boldsymbol{sin\alpha}$$



Moment pędu $\vec{L}$

ruch jednostajny po okręgu



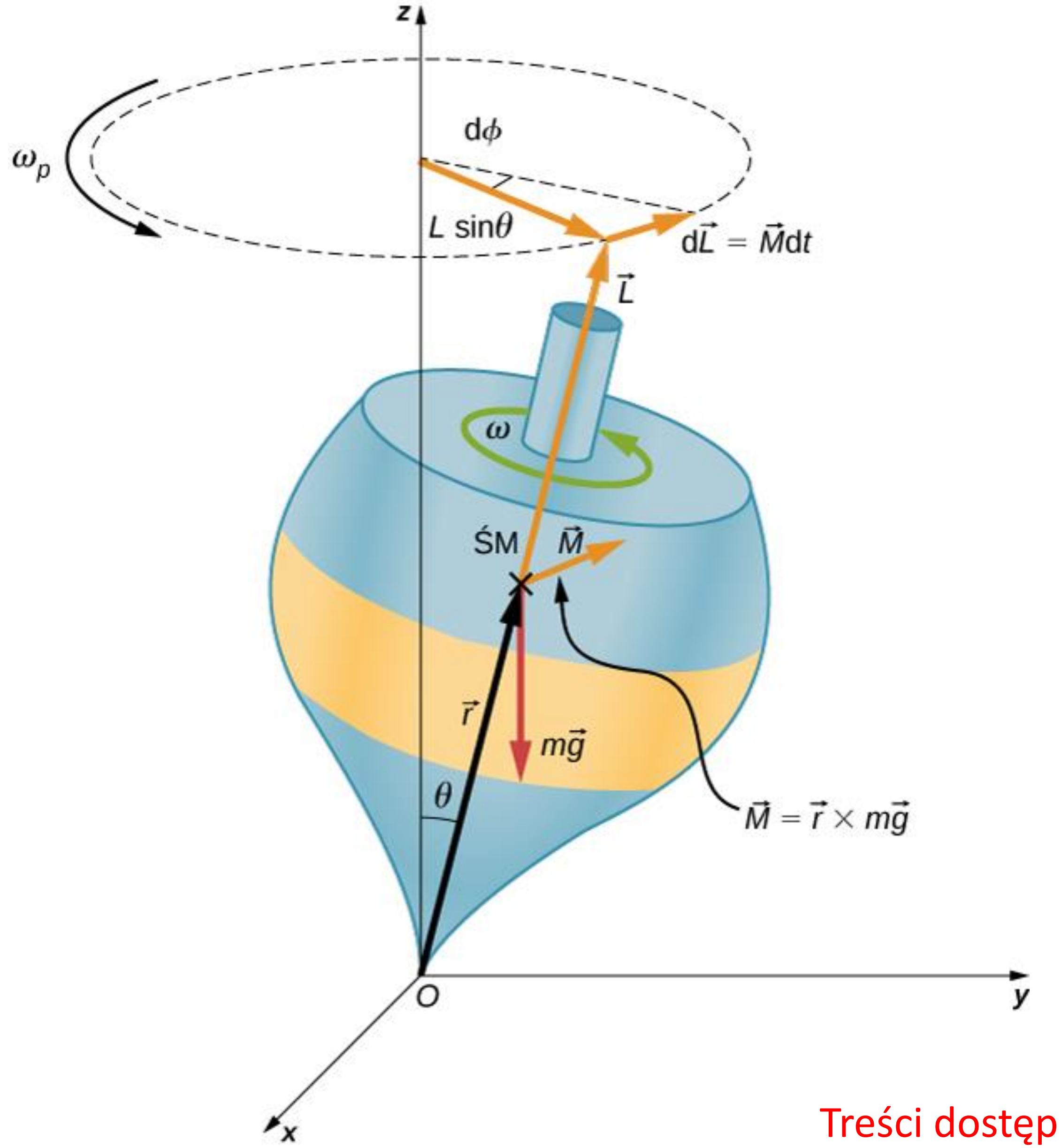
$$\vec{\boldsymbol{p}}_1 = m\vec{\boldsymbol{v}}_1$$

$$\vec{\boldsymbol{p}}_1' = m\vec{\boldsymbol{v}}_1'$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_1 = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}}_1 = \vec{\boldsymbol{L}}_1' = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}}_1'$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_i = m r_i^2 \vec{\boldsymbol{\omega}} \qquad \vec{\boldsymbol{L}} = I\vec{\boldsymbol{\omega}} = Mr^2\vec{\boldsymbol{\omega}}$$

$\vec{p}$ - pęd, $\vec{v}$ - prędkość liniowa



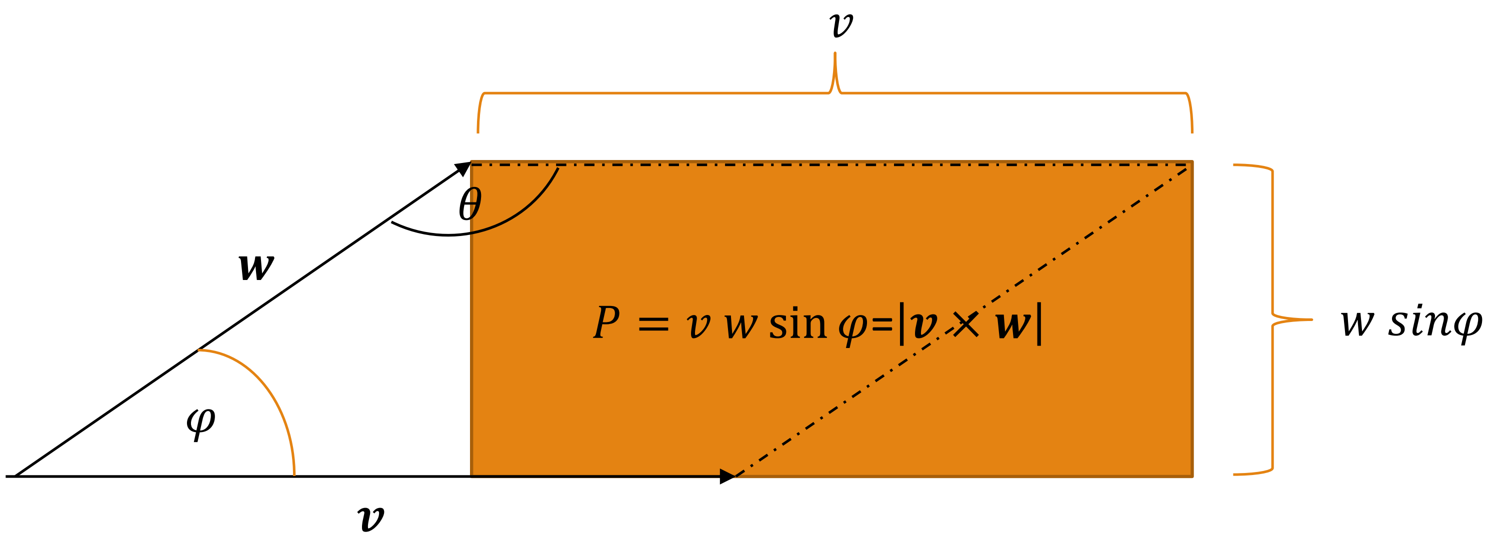
Wypadkowa sił działająca na środek ciężkości wytwarza moment sił $\vec{M}$ w kierunku prostopadłym do wektora momentu pędu $\vec{L}$. Wartość $\vec{L}$ nie zmienia się, ale kierunek $\vec{L}$ podlega zmianom, a oś symetrii bączka dokonuje precesji wokół osi z .

Treści dostępne za darmo na
https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/11-4-precesja-zyroskopu

Interpretacja geometryczna iloczynu wektorowego

Moduł iloczynu wektorowego $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ jest równy polu równoległoboku

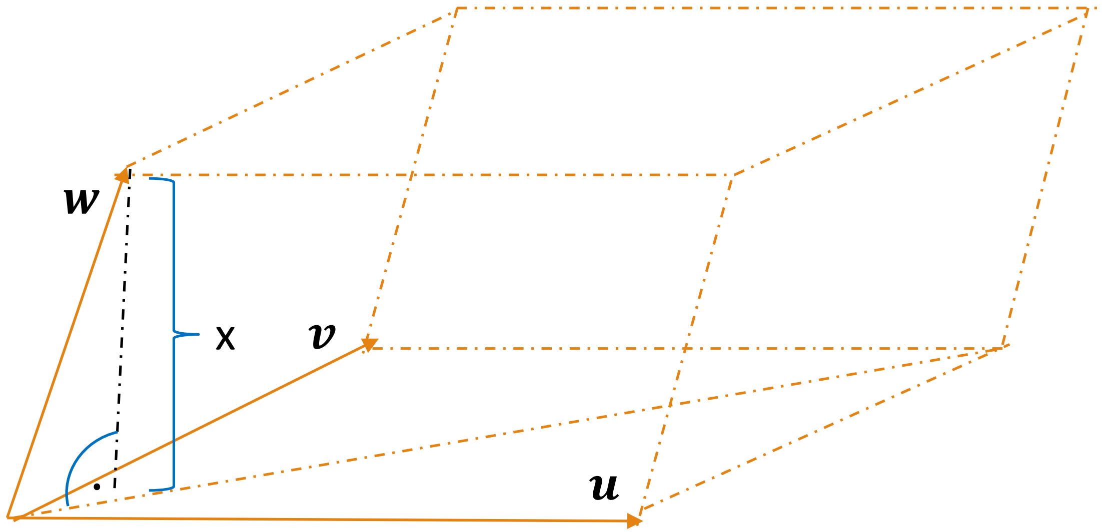
o bokach zadanych przez wektory $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$ oraz kątach $\varphi = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$ i $\theta = \pi - \varphi$:



Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego

$$\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$$

$$|\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w})| = u_1 v_2 w_3 + u_2 v_3 w_1 + u_3 v_1 w_2 - u_3 v_2 w_1 - u_1 v_3 w_2 - u_2 v_1 w_3 \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$



$$\boldsymbol{V} = |\boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})|$$

Przykłady

Zad. 1.

Wyprowadź równanie na iloczyn skalarny $\vec{\boldsymbol{v}} \cdot \vec{\boldsymbol{w}} = v_x w_x + v_y w_y + v_z w_z$ dwóch wektorów $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, wyrażonych za pomocą wektorów jednostkowych.

Zad. 2.

Wyprowadź równanie na iloczyn wektorowy $\vec{\boldsymbol{v}} \times \vec{\boldsymbol{w}} = \vec{\imath}\left(\boldsymbol{v_y} w_{\boldsymbol{z}} - \boldsymbol{v_z} w_{\boldsymbol{y}}\right) + \vec{\jmath}(\boldsymbol{v_z} w_{\boldsymbol{x}} - \boldsymbol{v_x} w_{\boldsymbol{z}}) + \vec{k}\left(\boldsymbol{v_x} w_{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{v_y} w_{\boldsymbol{x}}\right)$ dwóch wektorów $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, wyrażonych za pomocą wektorów jednostkowych.

Zad.3.

Znaleźć składową i wektor składowy wektora $\vec{A} = 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ wzdłuż wektora $\vec{B} = 4\vec{\jmath}$.

Literatura

1. E. Karaśkiewicz, Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, W-wa 1976 (lub inne wydania).

2. T. Trajdos, Matematyka cz. 3, WN-T, W-wa 1999 (lub inne wydania).

3. W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny , Fizyka dla szkół wyższych Tom I, ISBN-13: 978-83-948838-1-2

https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1

4. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki 1, PWN, W-wa 2011 (lub inne wydania).