

Elektryczność i magnetyzm

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Przewodniki i izolatory

Istnieją takie substancje zwane **przewodnikami**, w których **ładunki ujemne (dodatnie jony pozostają nieruchome)** mogą się swobodnie poruszać.

Przewodniki to np. woda morska, ciało ludzkie, miedź, srebro, złoto.

Substancje, w których ładunki nie mogą się swobodnie poruszać nazywamy **izolatorami**, należą do nich np. szkło, chemicznie czysta woda czy plastik.

Powyższy podział substancji wynika z ich budowy atomowej.

Półprzewodniki to materiały pośrednie między przewodnikami i izolatorami

Ładunek elementarny e

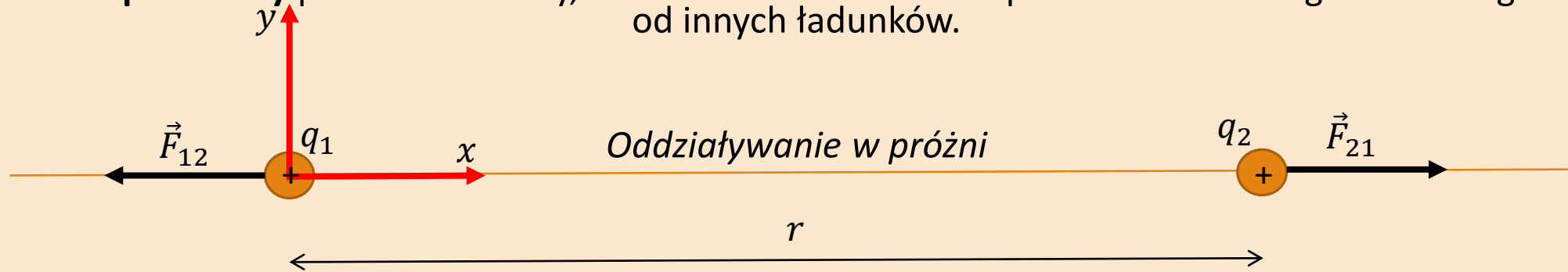
Ładunek jest skwantowany: $q = ne$

$$n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

$$e = 1,60 \cdot 10^{-19} [C]$$

Prawo Coulomba

Ładunek punktowy posiada rozmiary, które można zaniedbać w porównaniu z odległościami tego ciała od innych ładunków.



$$\vec{F}_{12} = -\underbrace{\frac{1}{4\pi\epsilon_0}}_k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{l} = -\vec{F}_{21}$$

Dla przypadku układu złożonego z N ładunków punktowych obowiązuje **zasada superpozycji sił**:

$$\vec{F} = k \sum_{i=1}^N \frac{q_0 q_i}{r_i^2} \frac{\vec{r}_i}{r_i}$$

q_1, q_2 - ładunki punktowe, $[C]$ - kulomb $\epsilon_0 = 8,85415 \cdot 10^{-12} [C^2 / N \cdot m^2]$ - przenikalność elektryczna próżni

Natężenie pola elektrycznego. Indukcja elektryczna

Natężenie pola elektrycznego (ładunku punktowego) w jednorodnym i izotropowym ośrodku dielektrycznym:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \vec{n}$$

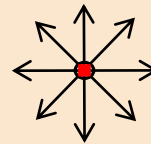
ϵ – bezwzględna przenikalność elektryczna danego ośrodka

Pole elektryczne jest polem centralnym!

Indukcja elektryczna \vec{D} jest niezależna od rodzaju ośrodka:

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \vec{n}$$

Indukcja elektryczna \vec{D} w próżni:



$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2} \vec{n}$$

Strumień wektora indukcji elektrycznej Φ przepływający przez powierzchnię S (wyływ wektora indukcji przez powierzchnię) :

$$\Phi = \int_S \vec{D} \cdot \vec{dS}$$

\vec{dS} – skierowany element powierzchni S , wektor o wartości dS i kierunku normalnej \vec{n} do elementu dS :

$$\vec{dS} = dS \cdot \vec{n}$$

Potencjał elektryczny

$$V(\vec{r}) = - \int_{\infty}^r \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C$$

$$V(\infty) = 0 \quad \longrightarrow \quad C = 0$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad [V] - \text{wolt}$$

Potencjał elektryczny jest równy całce liniowej z natężenia pola elektrycznego w granicach od punktu danego wektorem wodzącym \vec{r} do nieskończoności (punktu, w którym potencjał przyjmuje wartość zerową).

Potencjalne pole sił

Pole sił : $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$$

Bezwirowe pole sił:

$$\nabla \times \vec{E} = 0 \quad (\text{rot } \vec{E} = 0)$$

Pole elektrostatyczne jest bezwirowe!

$$\vec{E} = -\nabla V$$

Pole \vec{E} ma potencjał (pole **POTENCJALNE**)

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

$$E_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad E_y = -\frac{\partial V}{\partial y} \quad E_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

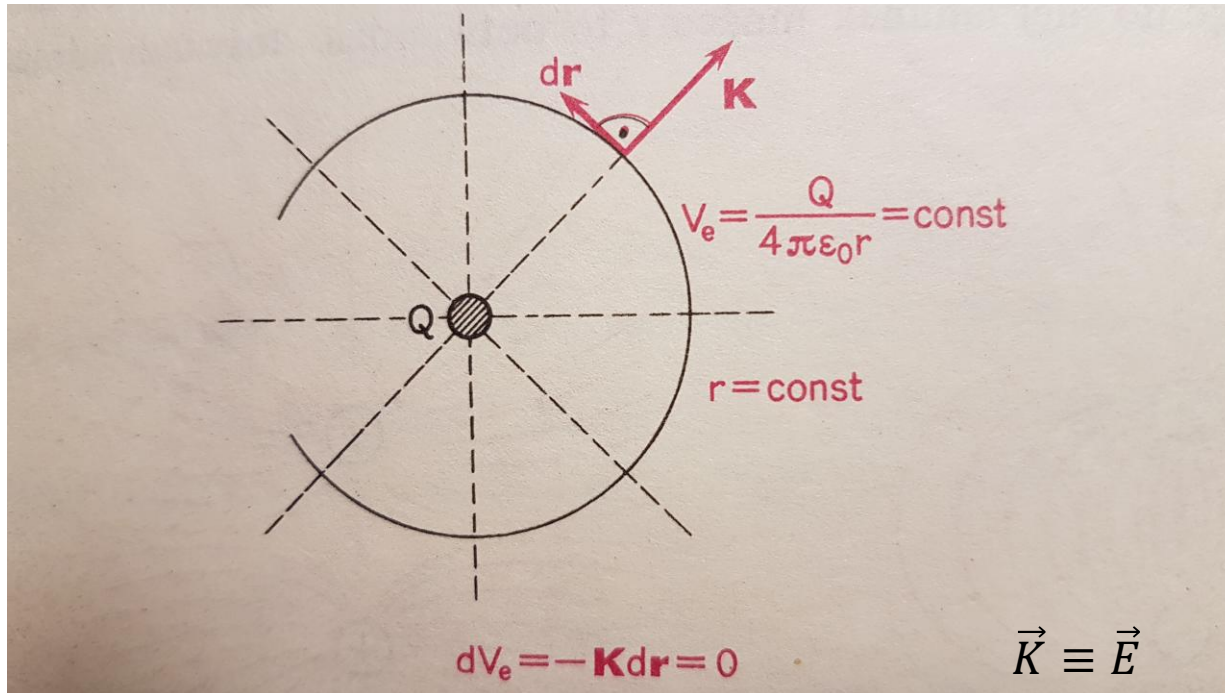
$$V(\vec{r}) = -\int_{r_0}^r \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

\vec{r}_0 - punkt odniesienia

\vec{E} - natężenie statycznego pola elektrycznego

V – potencjał statycznego pola elektrycznego

Powierzchnia ekwipotencjalna



Powierzchnie ekwipotencjalne to powierzchnie stałego potencjału:

$$V = \text{const} \rightarrow -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = 0$$

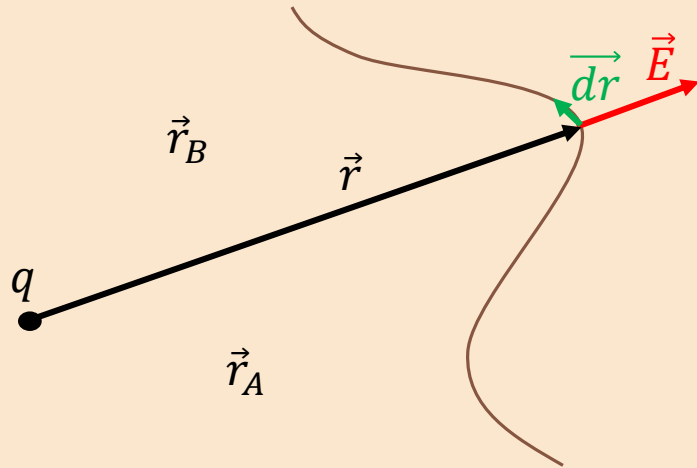
Każde przemieszczenie na powierzchni ekwipotencjalnej jest prostopadłe do pola.

Dla ładunku punkowego $r = \text{const}$, co oznacza, że powierzchnie ekwipotencjalne to współśrodkowe powłoki kuliste, prostopadłe do linii pola.

Napięcie elektryczne

$$V_A(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{r_A} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{r_A}^{\infty} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr}$$

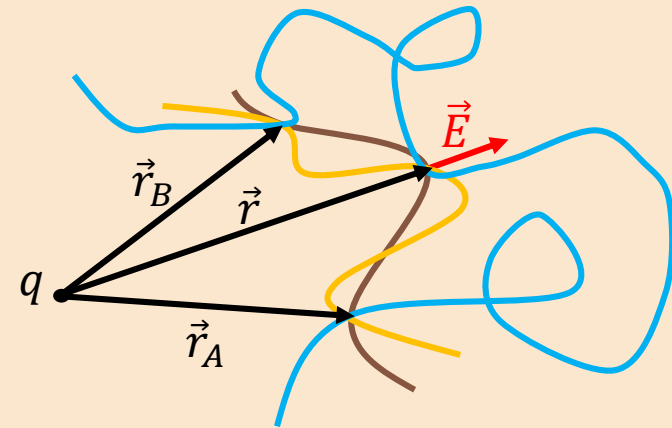
$$V_B(\vec{r}) = - \int_{\infty}^{r_B} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = \int_{r_B}^{\infty} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr}$$



$$U_{AB} = V_A(\vec{r}) - V_B(\vec{r}) = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr}$$

Napięcie U_{AB} nie zależy od drogi całkowania:

$$U_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_A}^{r_B} \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$



Praca w polu elektrycznym

$$W_{AB} = q \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = qU_{AB} = q(V_A - V_B)$$

$$\text{Dżul: } [J] = [C \cdot V]$$

$$V(r) = \frac{1}{q} W_{r\infty} - \text{napięcie między danym punktem a } \infty$$

Praca przemieszczania ładunku q od punktu A do punktu B nie zależy od kształtu toru przemieszczania ładunku – pole elektryczne jest **polem zachowawczym!**

$$W_{BB} = q \oint \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = q(V_B - V_B) = 0$$

$$U_{AB} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

$$W_{AB} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right)$$

1) Praca dodatnia: $r_B > r_A$ - ładunki Q i q są jednoimienne; $r_B < r_A$ - ładunki Q i q są różnoimienne

2) Praca ujemna: $r_B < r_A$ - ładunki Q i q są jednoimienne; $r_B > r_A$ - ładunki Q i q są różnoimienne

Energia potencjalna

$$\vec{F} = -\text{grad } E_p$$

$$dW = \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = -\text{grad } E_p \cdot \overrightarrow{dr} = -dE_p$$

$$W_{AB} = q \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = qU_{AB} = q(V_A - V_B)$$

$$W_{AB} = \int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot \overrightarrow{dr} = E_{pA} - E_{pB}$$

$$E_{pA} = qV_A = -q \int_{\infty}^{r_A} \vec{E} \cdot \overrightarrow{dl}$$

$$E_{pB} = qV_B$$

$$E_p(r) = q \underbrace{\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}}_{V(r)}$$

Ciągły rozkład ładunku

Ładunek punktowy rozmieszczony jest w obszarze o bardzo małych (pomijalnych w danym zagadnieniu) rozmiarach.

Ciągły rozkład ładunku Q w objętości V o gęstości przestrzennej ładunku ρ :

$$Q = \int \rho dV$$

$$\rho = \frac{dQ}{dV}$$

Ciągły rozkład ładunku Q na naładowanej powierzchni S o gęstości powierzchniowej ładunku σ :

$$Q = \int \sigma dS$$

$$\sigma = \frac{dQ}{dS}$$

Ciągły rozkład ładunku Q na naładowanej linii o długości l i gęstości liniowej ładunku λ :

$$Q = \int \lambda dl$$

$$\lambda = \frac{dQ}{dl}$$

Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

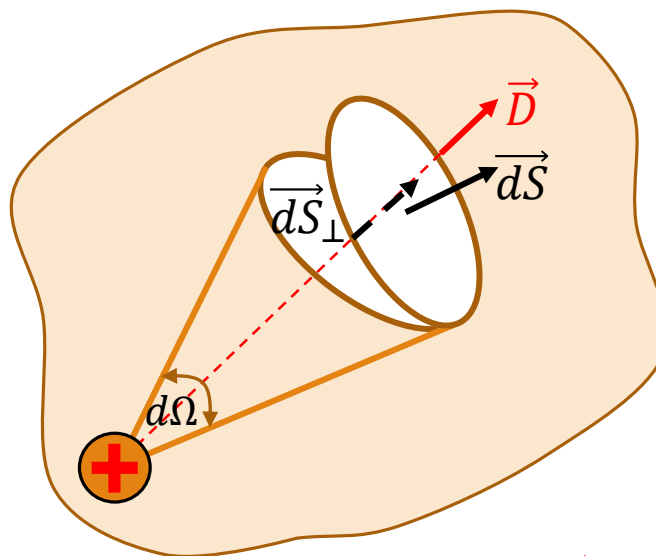
$$\operatorname{div} \vec{D} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} d\Phi = \frac{d\Phi}{dV}$$

Aby znaleźć całkowity strumień Φ – całkujemy strumień $d\Phi$ po całej powierzchni S zamykającej obszar. Każda para sąsiadujących elementów nie generuje strumieni przez powierzchnie graniczne, gdyż znoszą się one wzajemnie. Ostatecznie pozostaje tylko **strumień przez zewnętrzną powierzchnię całego obszaru**:

$$\int_V \operatorname{div} \vec{D} dV = \Phi = \oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi = \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \oint_S D \underbrace{\cos \alpha dS}_{dS_{\perp}}$$

dS_{\perp} - rzut elementu powierzchni $d\vec{S}$ na płaszczyznę prostopadłą do \vec{D}



$$d\Omega = \frac{dS_{\perp}}{r^2}$$

$$D = \frac{1}{4\pi} \frac{q}{r^2}$$

Całkowanie po powierzchni można zastąpić całkowaniem po kącie bryłowym:

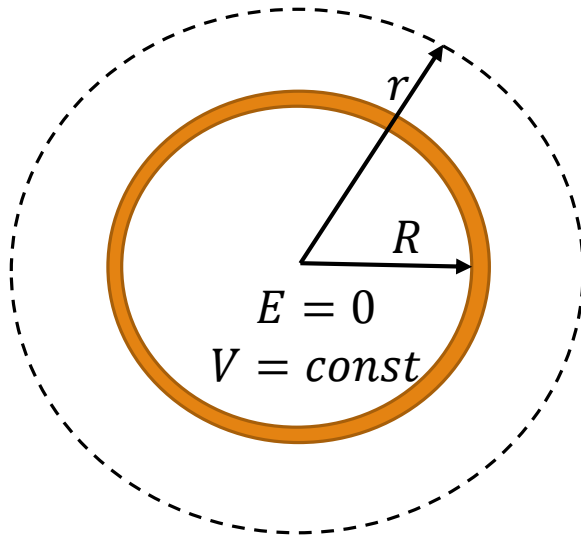
$$\Phi = \frac{q}{4\pi} \int_0^{4\pi} \underbrace{d\Omega}_{=4\pi} = q$$

Strumień wektora \vec{D} przepływający przez powierzchnię zamkniętą nie zależy od jej kształtu i jest równy zawartemu wewnątrz (wypadkowemu) ładunkowi.

Prawo Gaussa najczęściej stosuje się w przypadkach, gdy korzystając z zasady superpozycji całkowanie okazuje się być bardzo trudne!

Pole naładowanej powłoki kulistej

$$\sigma = \text{const} = \frac{q}{4\pi R^2}$$



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \oint_S dS = E 4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\vec{r}}{r} \quad r > R$$

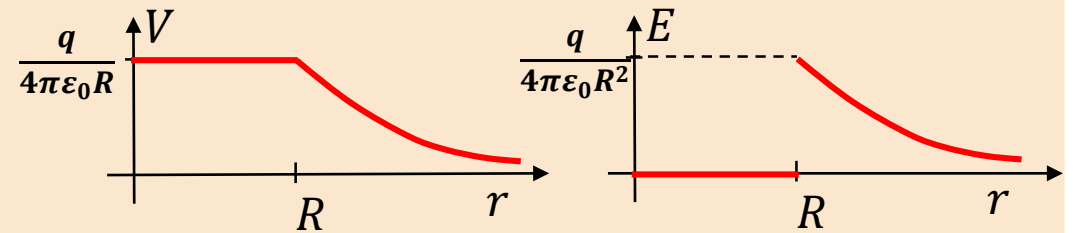
$$r > R$$

$$V = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_r^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{R^2\sigma}{\epsilon_0 r}$$

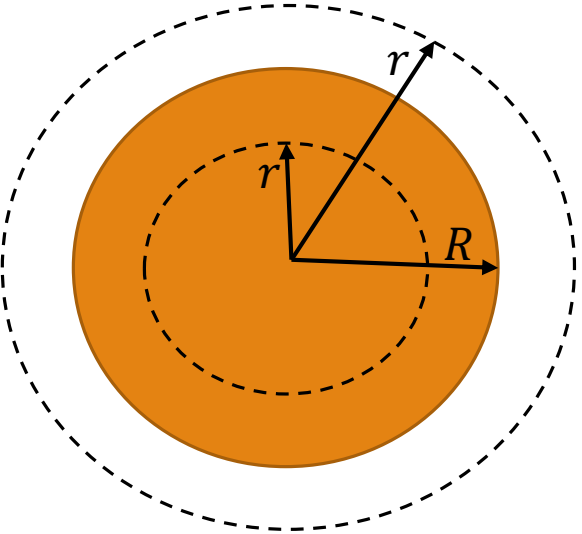
$$r < R$$

$$V = \int_r^R \vec{E} \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} = \text{const} = \frac{R\sigma}{\epsilon_0}$$

Potencjał wewnątrz powłoki i na jej powierzchni ma taką samą wartość!

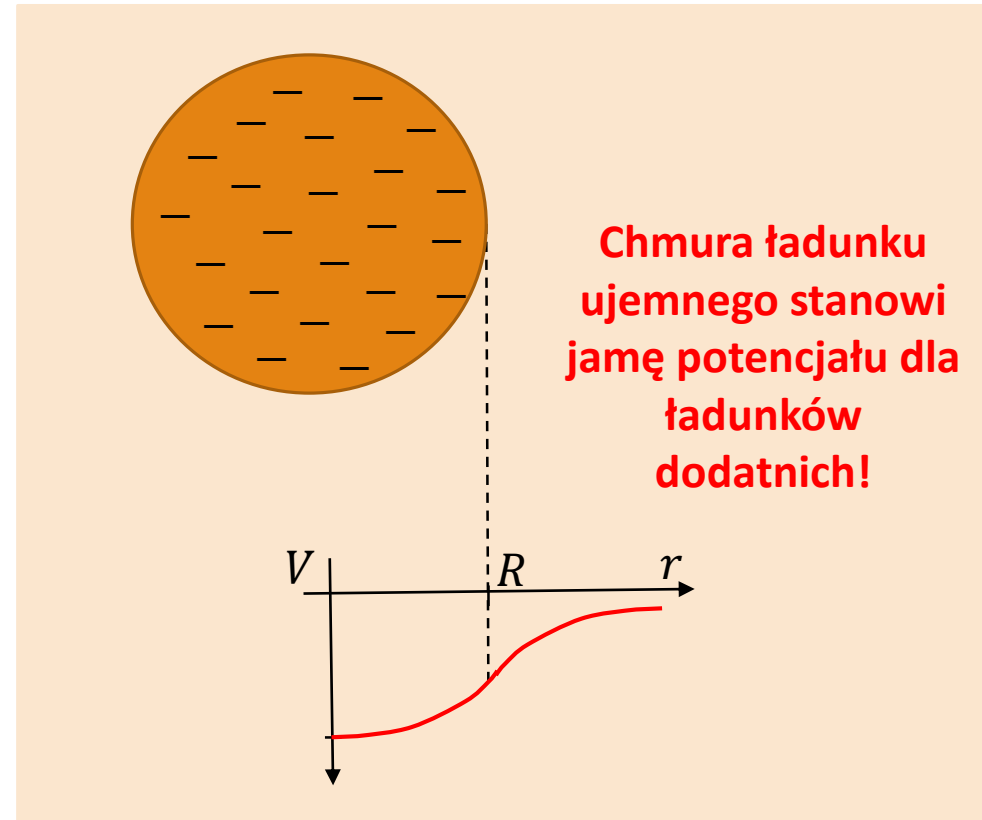
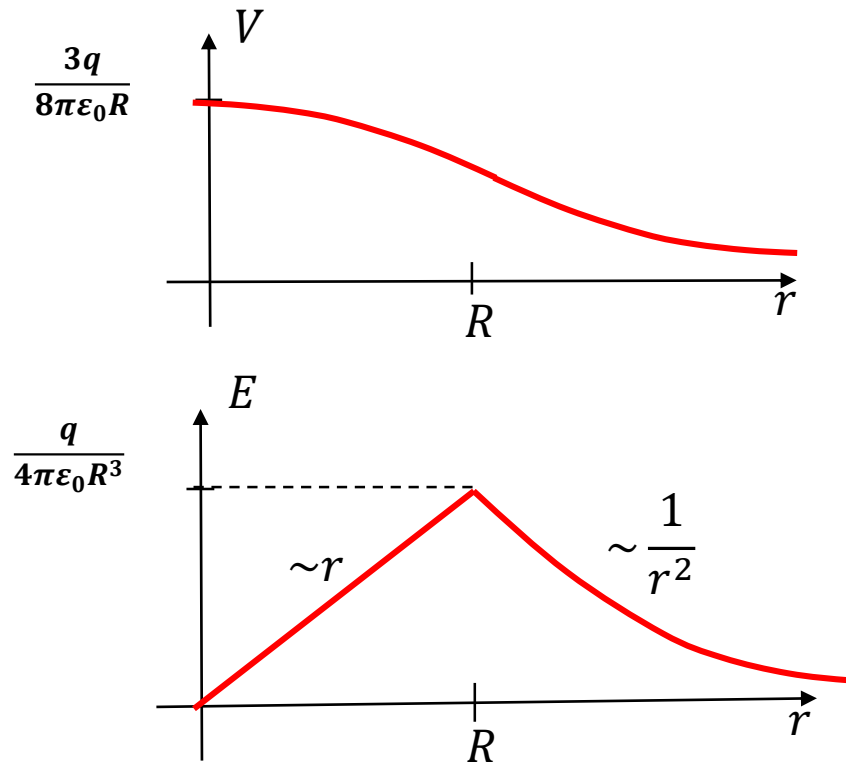


Pole naładowanej kuli (z prawa Gaussa)

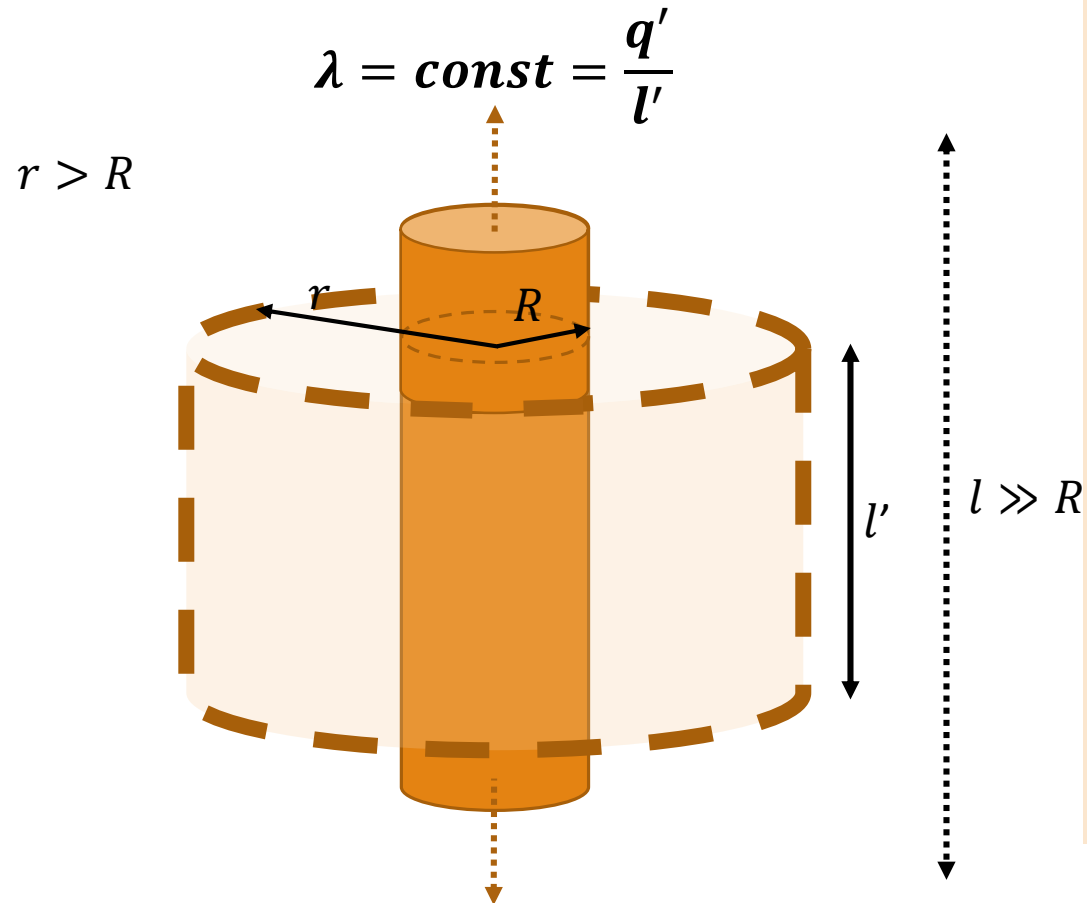
$$\rho = \text{const} = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r} \quad V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \quad r > R$$

$$r < R$$
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 4\pi r^2 = \frac{q(r)}{\epsilon_0}$$
$$q(r) = \rho \frac{4}{3}\pi r^3 = q \frac{r^3}{R^3}$$
$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r}$$
$$V = \int_r^R \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^3} \vec{r} \cdot d\vec{r} + \int_R^\infty \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} \cdot d\vec{r}$$
$$V = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{qr^2}{8\pi\epsilon_0 R^3} = \frac{3q}{8\pi\epsilon_0 R} \left(1 - \frac{r^2}{3R^2}\right)$$

Pole naładowowanej kuli (z prawa Gaussa)



Pole nieskończenie długiego i naładowanego walca



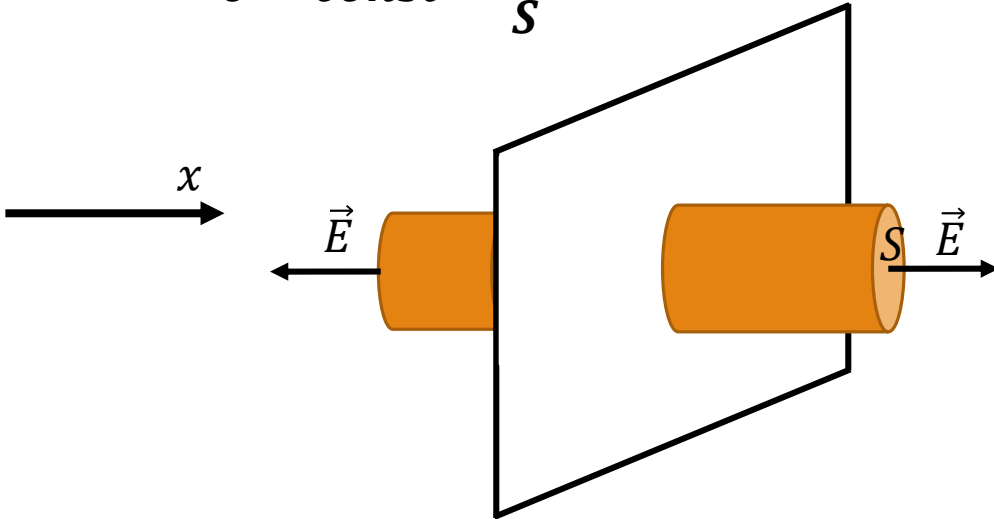
$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 2\pi r l' = \frac{\overbrace{\lambda l'}^{q'}}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{\vec{r}}{r}$$

Pole nieskończenie wielkiej i naładowanej płaszczyzny

Płaszczyzna ma bardzo duże rozmiary w stosunku do odległości, w jakiej wyznaczamy natężenie pola.

$$\sigma = \text{const} = \frac{q'}{S}$$



$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E 2S = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Pole nieskończenie wielkiej i równomiernie naładowanej płaszczyzny jest jednorodne w całej przestrzeni!

Pole w przewodniku

Ładunki mogą się swobodnie przemieszczać!

W normalnych warunkach przewodniki to:
metale, węgiel i elektrolity czyli roztwory kwasów zasad i soli.

Nośniki ładunku w ciałach stałych to elektrony, a w elektrolitach – jony.

Ładunek dostarczony do przewodnika rozmieszcza się na jego powierzchni (w warstwie rzędu około dwóch odległości międzyatomowych).

Przewodnik jest obszarem ekwipotencjalnym.

Michał Faraday (angielski fizyk i chemik 22.09.1791 – 25.08.1867) zaobserwował, że ładunek elektryczny wprowadzony na przewodnik rozmieszcza się na **zewnętrznej** jego powierzchni.

Ładunek elektryczny q wprowadzony na przewodnik rozmieszcza się na jego powierzchni S **nierównomiernie** z gęstością powierzchniową ładunku σ :

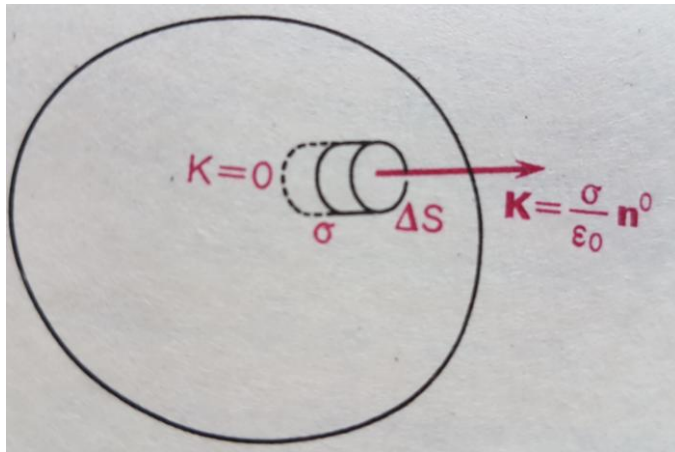
$$\sigma = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta S},$$

gdzie ładunek Δq rozmieszcza się na powierzchni ΔS .

Pole w przewodniku

Z prawa Gaussa wynika, że przy powierzchni przewodnika **wektor natężenia pola \vec{E} jest prostopadły do elementu tej powierzchni ΔS i równy lokalnej gęstości powierzchniowej ładunku σ podzielonej przez przenikalność dielektryczną próżni**

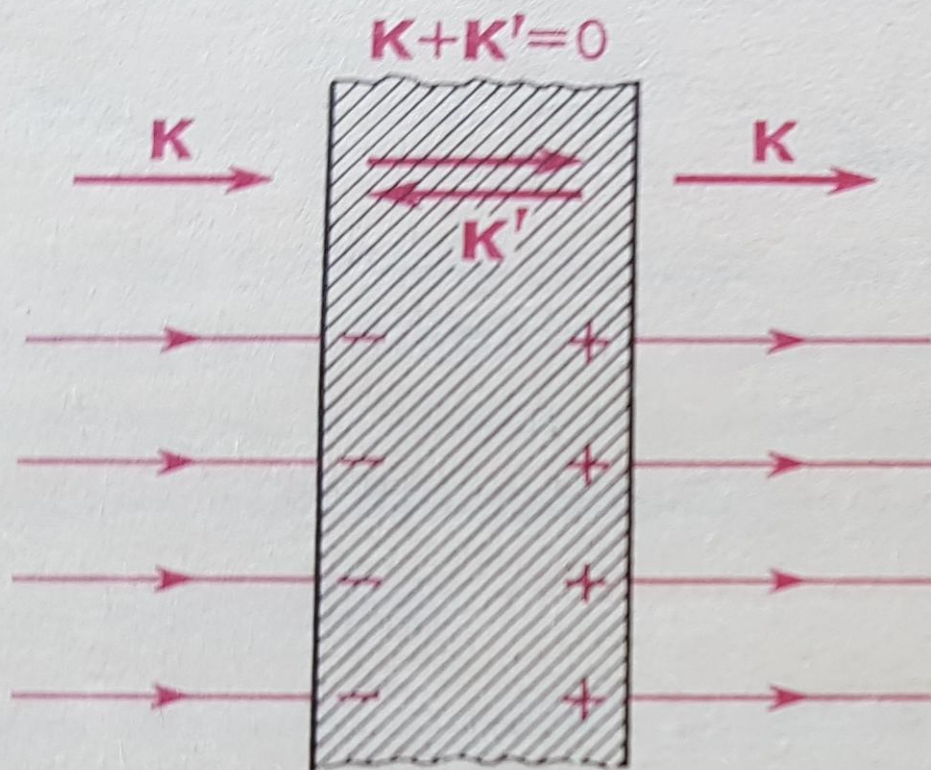
Pod wpływem zewnętrznego pola elektrony w przewodniku przemieszczają się do chwili, aż pole indukowanych ładunków nie sprowadzi pola wewnątrz przewodnika do zera (potencjał musi być więc stały).



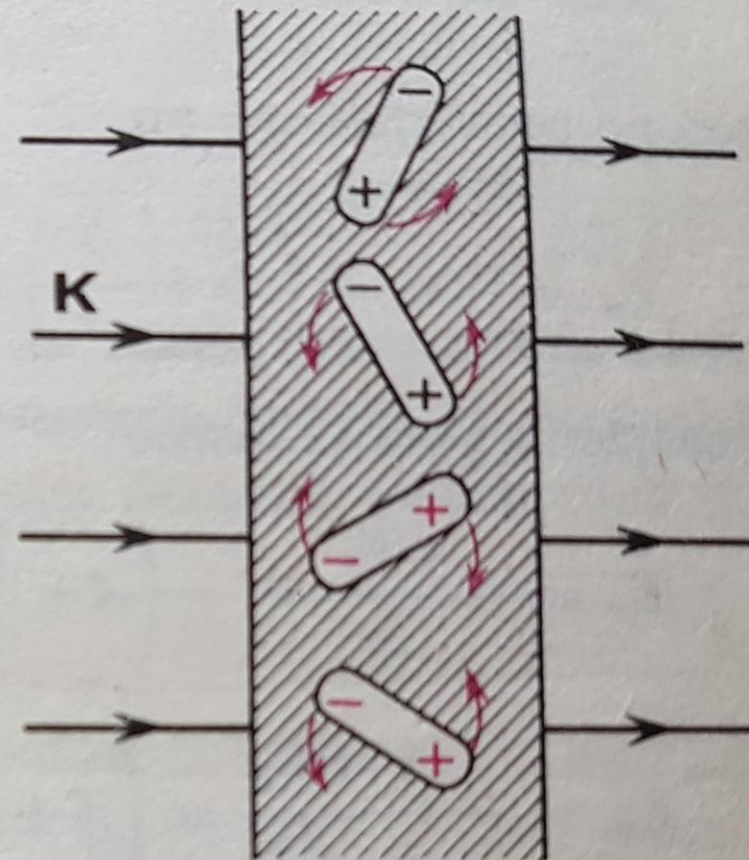
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{S} = E_n \Delta S = \frac{\sigma \Delta S}{\epsilon_0}$$

$$d\vec{S} = \Delta S \vec{n}$$

$$E_n = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}$$



Rys. 162. Pole zewnętrzne rozdziela ładunki przewodnika dopóki pole wewnątrz niego nie stanie się równe zero.

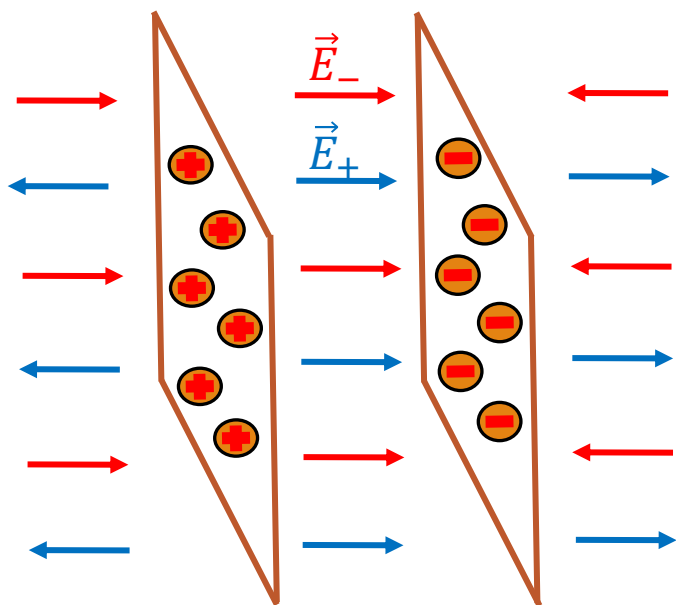


Rys. 163. Polaryzacja elektryczna: zewnętrzne pole wzbudza obojętne cząsteczki (u dołu) i obraca dipole cząsteczkowe.

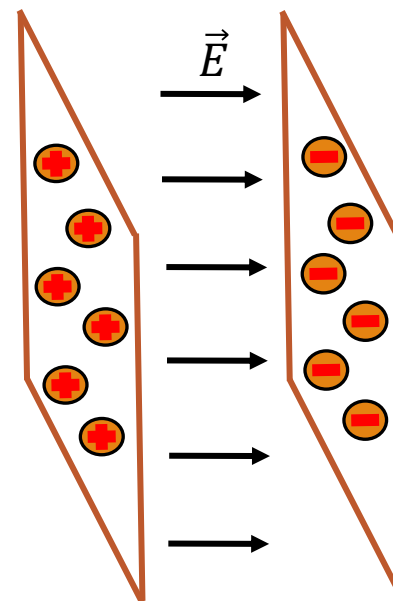
Pole kondensatora płaskiego

Dwie równoległe płyty naładowane ładunkami jednakowej gęstości, ale o przeciwnych znakach.

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_+| + |\vec{E}_-| = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}$$



Powierzchnie płyt są duże w porównaniu z odległością między nimi.



Pole jest jednorodne!

Pojemność kondensatora płaskiego

Potencjał V izolowanego przewodnika rośnie proporcjonalnie do wprowadzonego na niego ładunku elektrycznego q :

$$q = CV$$

C – pojemność elektryczna przewodnika

$$C = \frac{q}{V}$$

$$[F] = \left[\frac{C}{V} \right]$$

Ładowanie się przez indukcję drugiej okładki powoduje wzrost pojemności dwóch metalowych płyt w porównaniu z pojemnością pojedynczej płyty.

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}, \quad E = -\frac{dV}{ds} = \frac{U}{d}$$

$$U = \frac{\sigma}{\epsilon_0} d$$

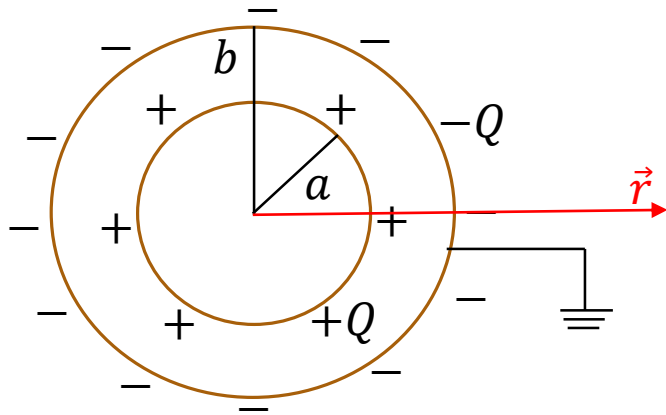
Ładunek na jednej z płyt: $q = \sigma S$

$$C = \epsilon_0 \frac{S}{d}$$

S – powierzchnia każdej z oddalonych od siebie o odległość d równoległych płyt

Kondensator kulisty

Kondensator kulisty to układ dwóch współśrodkowych czasz kulistych, wzajemnie odizolowanych.



Powierzchnię kulistą wewnętrzną ładuje się ładunkiem $+Q$, a zewnętrzną łączy z ziemią, co powoduje zebranie się na niej ładunku $-Q$.

$$\vec{E} = -\text{grad}V$$

$$dV = -\vec{E} \cdot \overrightarrow{dr} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dr$$

$$U_{ab} = V_a(\vec{r}) - V_b(\vec{r}) = \int_a^b \vec{E} \cdot \overrightarrow{dr}$$

$$U_{ab} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} \right)$$

$$C = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{r_a r_b}{r_b - r_a} \right)$$

Energia pola elektrycznego

Energia pola elektrycznego jest równa pracy W jaką wykonuje siła zewnętrzna podczas ładowania kondensatora do napięcia U .

$$W = qU \quad (U \text{ ma stałą wartość!})$$

Ładunek przenoszony jest na okładkę kondensatora małymi porcjami dq ($U = \frac{q}{C}$ **prawie stałe!**)

$$dW = \frac{q}{C} dq$$

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq$$

Q – całkowity ładunek przeniesiony na okładkę kondensatora

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = E_p = \frac{1}{2} C U^2$$

$$U = Ed \quad C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}$$

d – odległość między okładkami kondensatora płaskiego

$$E_p = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \widetilde{Sd}^V$$

$$\rho_e = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \vec{D} \vec{E}$$

Pole ładunków ruchomych

W statycznym polu elektrycznym ciała przewodzące to obszary stałego potencjału, w których wewnątrz pole znika.

PRZEPŁYW ŁADUNKÓW ELEKTRYCZNYCH W DOWOLNYM OŚRODKU MATERIALNYM TO PRĄD ELEKTRYCZNY.

Wewnątrz przewodnika, między końcami którego istnieje różnica potencjałów ($V_2 - V_1$), natężenie pola elektrycznego (wprawiające w ruch swobodne ładunki) wynosi:

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

„Umowny” kierunek przepływu prądu elektrycznego od bieguna dodatniego do bieguna ujemnego jest przeciwny do ruchu elektronów w przewodniku metalicznym!

Przepływ ładunków swobodnych wewnątrz przewodnika to PRĄD ELEKTRYCZNY

SEM

Aby wytworzyć stały przepływ ładunku potrzebne jest źródło, które utrzymuje różnicę potencjałów między parą swoich zacisków.

Urządzenie takie nazywa się źródłem siły elektromotorycznej:

źródłem SEM

Źródło SEM dostarcza siły elektromotorycznej, czyli oznacza, że wykonuje ono pracę nad nośnikami ładunku.

Miara prądu elektrycznego

Natężenie prądu stałego:

(natężenie i kierunek prądu nie zmieniają się w czasie):

$$I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$$

Δq – ładunek przepływający przez przekrój poprzeczny przewodnika w czasie Δt

$$\left[\frac{C}{s}\right] = [A] \text{ - amper}$$

Natężenie prądu zmiennego:

$$I = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{dq}{dt}$$

Przepływ prądu obu znaków:

$$I = \frac{dq^+}{dt} + \frac{dq^-}{dt}$$

Nośnikami ładunku w przewodnikach metalicznych są elektrony, a w elektrolitach – jony dodatnie i ujemne.

Dodatnie nośniki ładunku poruszają się z prędkością skierowaną zgodnie z lokalnym natężeniem pola elektrycznego i wyznaczają kierunek prądu.

Ruch elektronów w przewodnikach metalicznych

Elektrony w przewodnikach metalicznych zachowują się podobnie do cząsteczek gazu doskonałego:

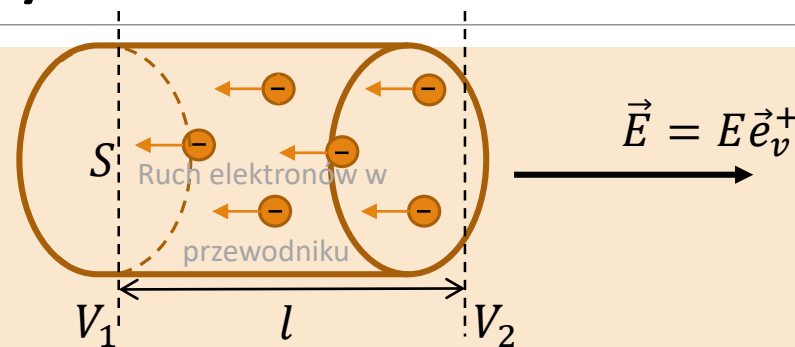
$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}kT$$

$$v \approx 10^5 \left[\frac{m}{s} \right]$$

Pole elektryczne w przewodniku, do którego końców przyłożono różnicę potencjałów wywołuje uporządkowany ruch elektronów z **prędkością unoszenia** v_u (inaczej zwaną **prędkością dryfu**), nakładający się na ruch cieplny:

$$v \gg v_u$$

v – pr. elektronu związana z ruchem cieplnym



Pod wpływem pola elektrycznego przez przekrój poprzeczny S przewodnika w czasie t przepłynie ładunek elektryczny znajdujący się w objętości:

$$V = Sl = Sv_u t$$

$$I = env_u S$$

e – ładunek elementarny

n – koncentracja nośników ładunku

Gęstość prądu elektrycznego

Gęstość prądu (objętościowa) to pochodna natężenia prądu względem prostopadłego do kierunku prądu pola przekroju przewodnika:

$$\vec{j} = \frac{dI}{dS_n} \vec{e}_v^+$$

\vec{e}_v^+ - kierunek prądu – kierunek ruchu nośników dodatnich

$$\vec{j} = en v_u^+ \vec{e}_v^+ = \rho \vec{v}_u^+$$

$$\vec{v}_u^+ = \frac{1}{ne} \vec{j}$$

ρ – objętościowa gęstość ładunku

$$I = \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

Miedź to najczęściej stosowany materiał przewodzący o koncentracji elektronów przewodnictwa:

$$n = 8,5 \cdot 10^{28} [m^{-3}]$$

Aby drut miedziany o przekroju poprzecznym $S = 1 [mm^2]$ się nie przegrzał, może przez niego płynąć prąd o wartości natężenia nie większej od $I = 10A$:

$$j = 10^7 \left[\frac{A}{m^2} \right]$$

$$v_u = \frac{j}{ne} = \frac{10^7}{8,5 \cdot 10^{28} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19}} = 7,4 \cdot 10^{-4} \left[\frac{m}{s} \right]$$

Elektrony poruszają się z prędkością mniejszą niż $1 \left[\frac{mm}{s} \right] !$

Równanie ciągłości

Szybkość ubywania (przrastania) ładunku z obszaru V ograniczonego powierzchnią S , przez którą przepływa prąd, jest równa natężeniu prądu wypływającego (dopływającego) z obszaru V :

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = \int_S \vec{j} d\vec{S}$$

Prawo Gaussa:

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV$$

$$-\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = \int_V \operatorname{div} \vec{j} dV$$

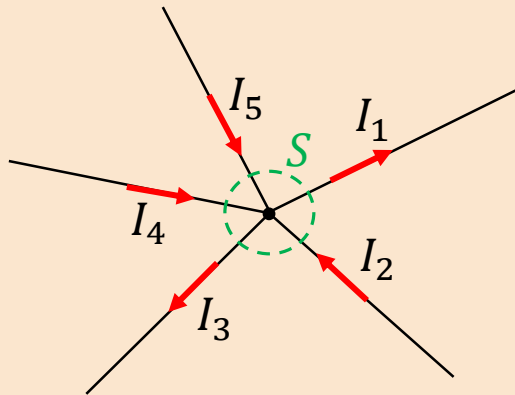
$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

W stanie stacjonarnym ubytek ładunków jest skompensowany ich dopływem i wektor gęstości prądu \vec{j} jest **wektorem SOLENOIDALNYM**:

$$\operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Pierwsze prawo Kirchhoffa

Układ przewodów elektrycznych złożonych z węzłów (punkt zbiegania się kilku przewodów) i oczek tworzy SIEĆ ELEKTRYCZNĄ



$$\text{div} \vec{j} = 0$$

Prawo ciągłości dla węzła sieci

$$\int_S \vec{j} d\vec{S} = \sum_{i=1}^n j_i S_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

Suma algebraiczna natężeń prądów dopływających (natężenie dodatnie) do węzła i z niego odpływających (natężenie ujemne) wynosi zero.

Prawo Ohma

$$I = \frac{1}{R} U$$

I – natężenie prądu płynącego przez przewodnik

U – napięcie końców przewodnika

$\frac{1}{R}$ - przewodność (konduktancja)

R – opór (rezystancja) o jednostce $[\Omega]$ - om

Dla **jednorodnego i izotropowego** przewodnika o przekroju poprzecznym S i długości l :

$$R = \rho_w \frac{l}{S}$$

ρ_w – opór właściwy (rezystancja)

$\frac{1}{\rho_w} = \gamma$ - przewodność właściwa (konduktywność)

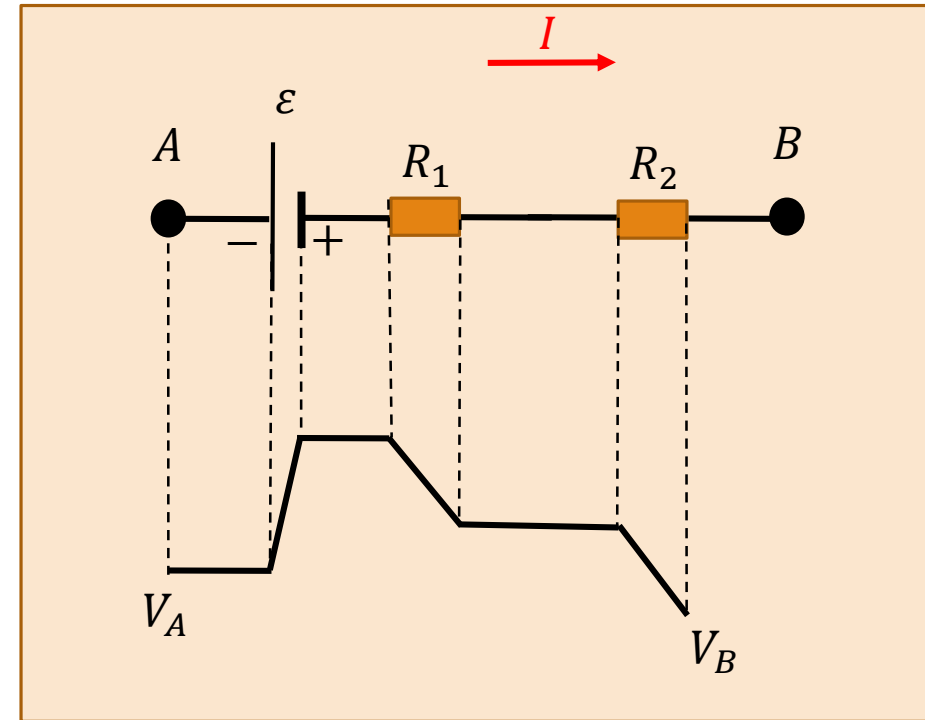
Drugie prawo Kirchhoffa

Dla obwodu zawierającego N źródeł siły elektromotorycznej ε_i i n oporników R_i , wszystkie elementy ($\varepsilon_i, R_i, i = 1 \dots n$) są połączone szeregowo zachodzi:

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \varepsilon_i}_{\substack{\text{siły} \\ \text{elektromotoryczne}}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n I_i R_i}_{\substack{\text{spadki napięć} \\ \text{na oporach obwodu}}}$$

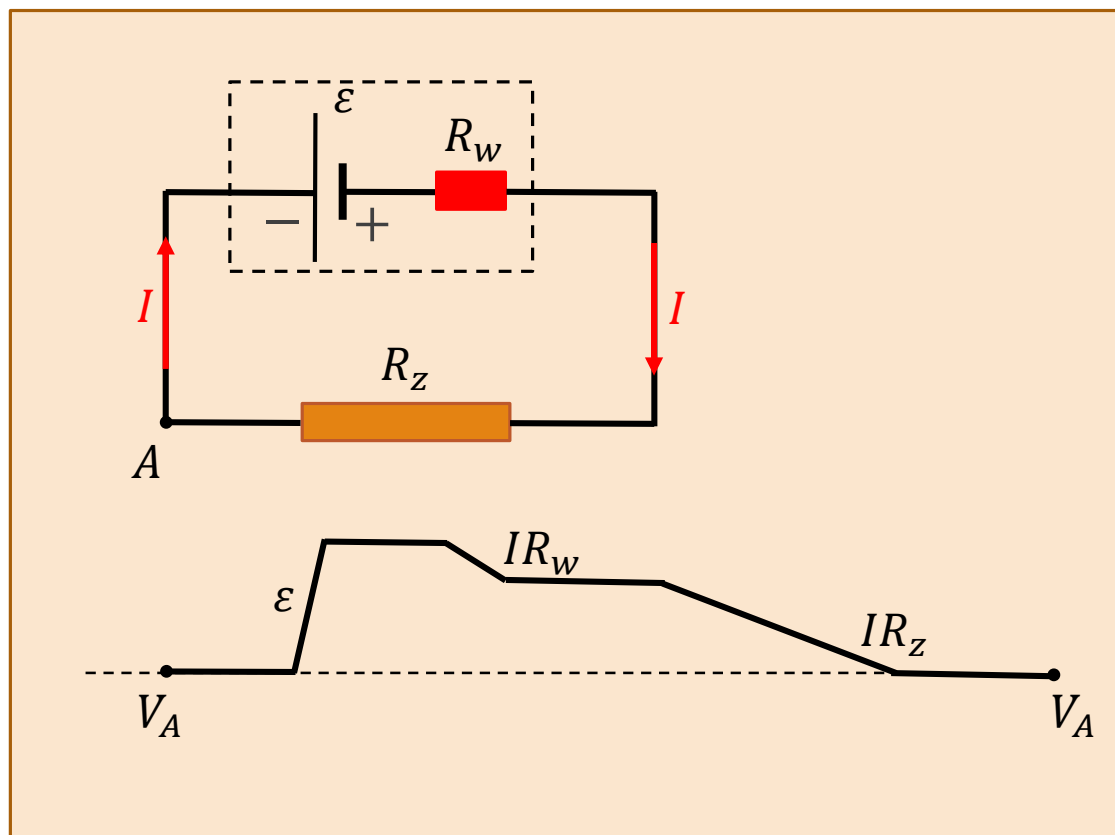
SUMOWANIE ALGEBRAICZNE!

(z uwzględnieniem znaków)



$$V_A - V_B = IR_1 + IR_2 - \varepsilon$$

Opór wewnętrzny i opór zewnętrzny



$$\varepsilon = \underbrace{IR_z}_U + IR_w$$

$$U = \varepsilon - IR_w$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R_z + R_w}$$

$$I_z = \frac{\varepsilon}{R_w}$$

I_z - prąd zwarcia (max. prąd obwodu)

Prawo Joule'a

Ciepło Joule'a wydziela się wskutek zamiany energii utraconej na opory ruchu przez nośniki prądu podczas przepływu prądu.

$$W = q(V_1 - V_2) = UIt$$

Ciepło wydzielone w czasie t :

$$Q = \underset{I=const}{\underset{\approx q}{It}} \quad U = \frac{U^2}{R} t = I^2 R t$$

Dla zmiennego natężenia prądu:

$$Q = \int_0^t R I^2 dt$$

Moc w obwodach elektrycznych

Moc do przesłania

$$P = IU = 100MW$$

Długość przewodu przesyłowego

$$l = 20 \text{ km}$$

Opór 1 km przewodu przesyłowego

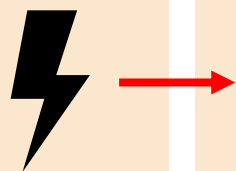
$$R = 0.05 \Omega$$

Opór 20 km przewodu przesyłowego

$$R = 1 \Omega$$

Napięcie wejściowe

$$V = 400\,000 \text{ V}$$



$$I = \frac{P}{V} = \frac{100\,000\,000}{400\,000} = 250 \text{ A}$$

Natężenie prądu

Strata mocy na odcinku 20 km przewodu:

$$P_s = I^2 R = 62\,500 \text{ W}$$

Strata mocy procentowo

$$0.0625 \%$$

Spadek napięcia na odcinku 20 km przewodu:

$$V = IR = 250V$$

Spadek napięcia procentowo

$$0.0625 \%$$

Siła magnetyczna

W polu magnetycznym na poruszające się ładunki elektryczne działa **siła magnetyczna**.

Na przewód o długości l , w którym płynie prąd elektryczny o natężeniu I , w polu magnetycznym działa siła magnetyczna \vec{F} :

$$F \sim I l \sin \alpha$$

α – kąt zawarty pomiędzy kierunkiem prądu elektrycznego i liniami pola magnetycznego

$$F = B I l \sin \alpha$$

B – indukcja magnetyczna - współczynnik proporcjonalności

$$\alpha = 90^\circ \rightarrow F_{max} = B I l$$

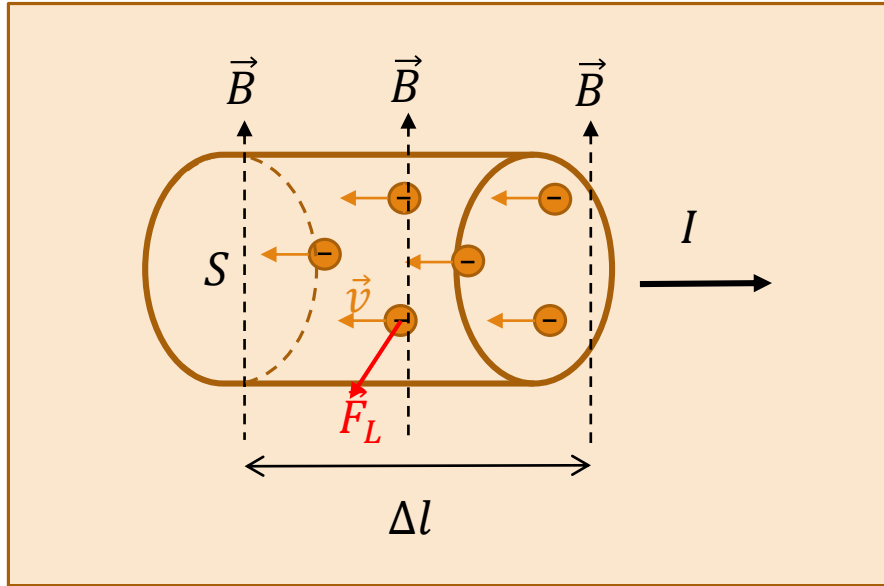
$$B = \frac{F_{max}}{I l}$$

$$[1T] = \frac{[1N]}{[1A \cdot 1m]}$$

$$\vec{F} = I(\vec{l} \times \vec{B})$$

\vec{l} - wektor o wartości równej długości przewodnika, o kierunku i zwrocie wyznaczonym płynącym w nim prądem elektrycznym

Ładunek elektryczny w polu magnetycznym – siła Lorentza



$$I = nqSv$$

v – prędkość unoszenia (dryfu)

$$\vec{\Delta F} = I(\vec{\Delta l} \times \vec{B})$$

$$\vec{\Delta F} = q(\vec{v} \times \vec{B})n \underbrace{S\Delta l}_{\Delta V}$$

Siła działająca na jeden nośnik ładunku - **siła Lorentza**:

$$\vec{F}_L = \frac{\vec{\Delta F}}{n\Delta V} = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Siła Lorentza zakrzywia tory naładowanych cząstek poruszających się w polu magnetycznym!

Siła działająca na ładunek elektryczny w polu elektromagnetycznym – **uogólniona siła Lorentza**:

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Prawo Biota i Savarta

Z doświadczenia wiadomo, że wokół przewodnika z prądem powstaje pole magnetyczne **bez składowej elektrycznej!**

Francuscy fizycy Biot i Savart zajmowali się stroną doświadczalną opisu pola magnetycznego na podstawie znajomości jego źródła.

Dla prądu stałego ustalono, że wartość indukcji magnetycznej $d\vec{B}$ pochodzącej od elementu długości $d\vec{l}$ przewodnika z prądem wynosi:

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Idl \sin \alpha}{r^2} \quad \vec{dB} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$$

$d\vec{l}$ - element długości przewodnika o zwrocie odpowiadającym kierunkowi prądu

μ_0 – przenikalność magnetyczna próżni (wyznaczana doświadczalnie)

\vec{r} - wektor zaczepiony w elemencie długości przewodnika $d\vec{l}$ i łączący go z punktem pola o wartości indukcji magnetycznej $d\vec{B}$

$$\alpha = \angle(\vec{r}; d\vec{l})$$

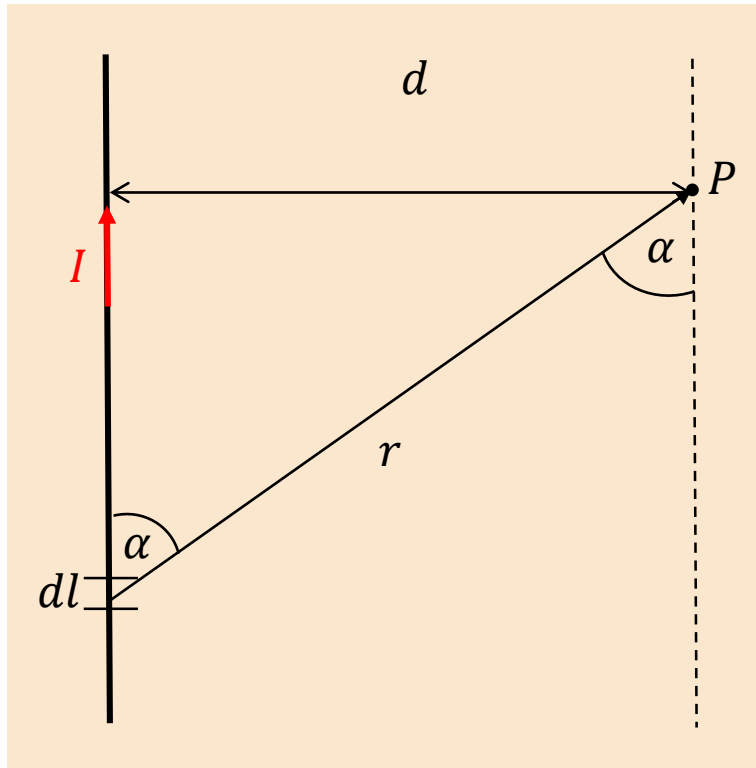
W ośrodku materialnym o bezwzględnej przenikalności magnetycznej μ :

$$\vec{dB} = \frac{\mu}{4\pi} I \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \quad \vec{B} = \int_l \vec{dB}$$

Dla prądów przestrzennych:

$$\vec{dB} = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\vec{j} \times \vec{r}}{r^3} dV$$

Pole magnetyczne prostoliniowego przewodu z prądem



$$\operatorname{ctg}(\alpha) = \frac{l}{d} \quad \sin(\alpha) = \frac{d}{r}$$

Indukcja magnetyczna w punkcie P:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_l \sin\alpha \frac{dl}{r^2}$$

$$r = \frac{d}{\sin(\alpha)} \quad dl = -\frac{d}{\sin^2\alpha} d\alpha$$

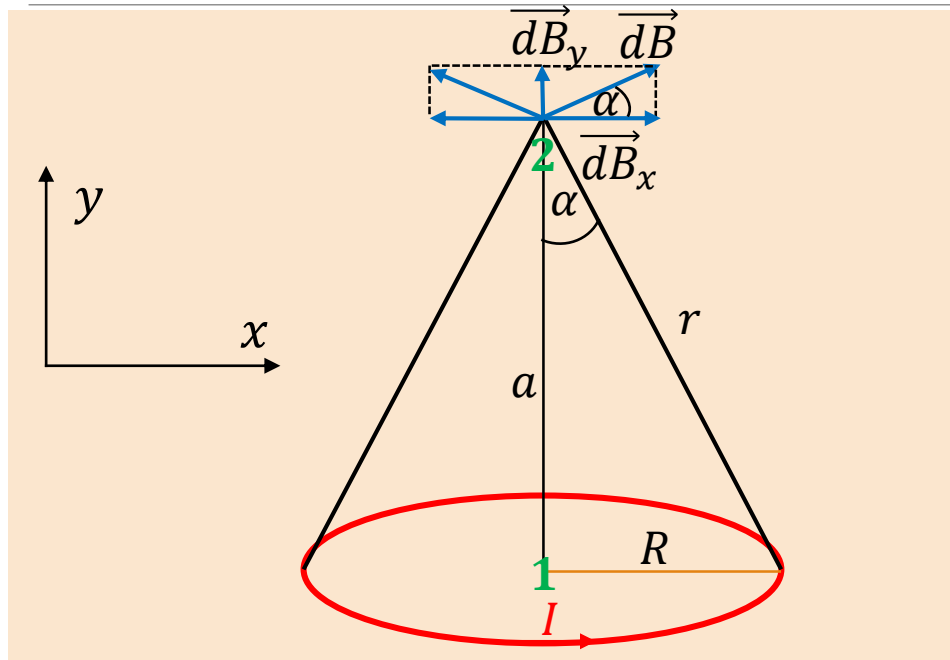
$$B = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \sin\alpha d\alpha$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{d} (\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1)$$

Indukcja magnetyczna dla nieskończonego przewodu:

$$\alpha_1 = 0^\circ, \alpha_2 = 180^\circ \quad B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{d}$$

Pole magnetyczne kołowego przewodu z prądem



W środku przewodu kołowego (punkt 1):

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I}{R^2} \sin\alpha \sum_{2\pi R} dl \stackrel{\alpha=90^\circ}{\approx} \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}$$

Dla punktu 2 leżącego na osi przewodu kołowego:

$$dB_y = dB \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}}$$

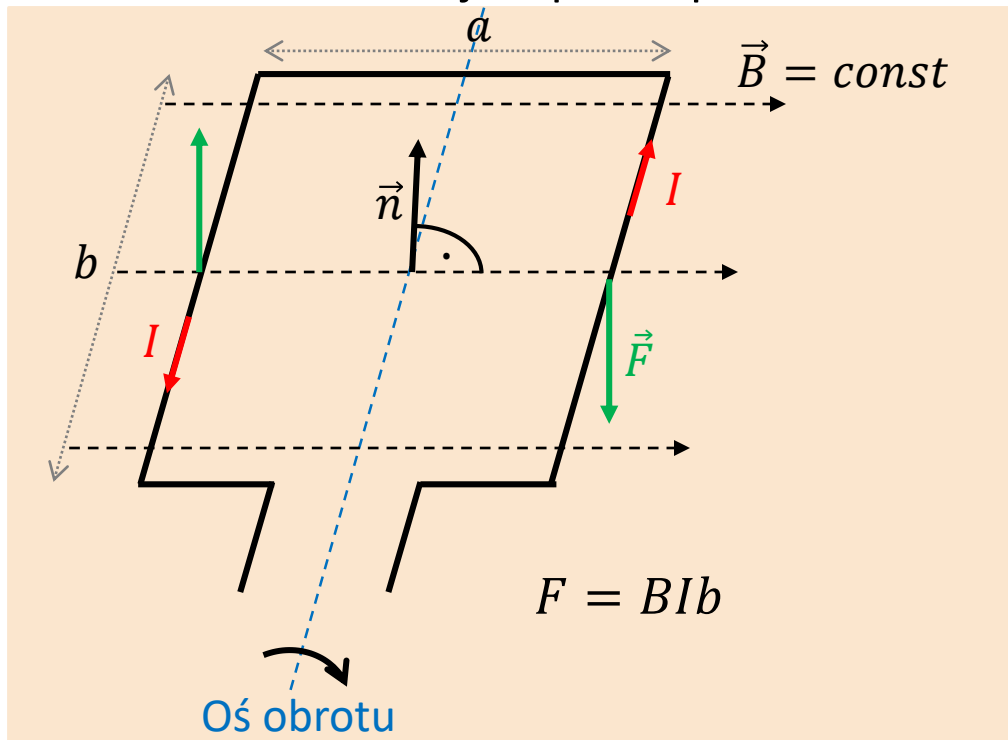
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{dl}{a^2 + R^2}$$

$$dB_y = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R dl}{(\sqrt{a^2 + R^2})^3}$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R}{(\sqrt{a^2 + R^2})^3} \sum_{2\pi R} dl = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(\sqrt{a^2 + R^2})^3} \stackrel{a=0}{\approx} B = \frac{\mu_0}{2} \frac{I}{R}$$

Ramka z prądem w polu magnetycznym

Oś obrotu ramki jest prostopadła do \vec{B}



\vec{n} - wektor normalny do powierzchni ramki

Siły \vec{F} tworzą parę sił o momencie obrotowym:

$$M = F a = B I a b = B I S$$

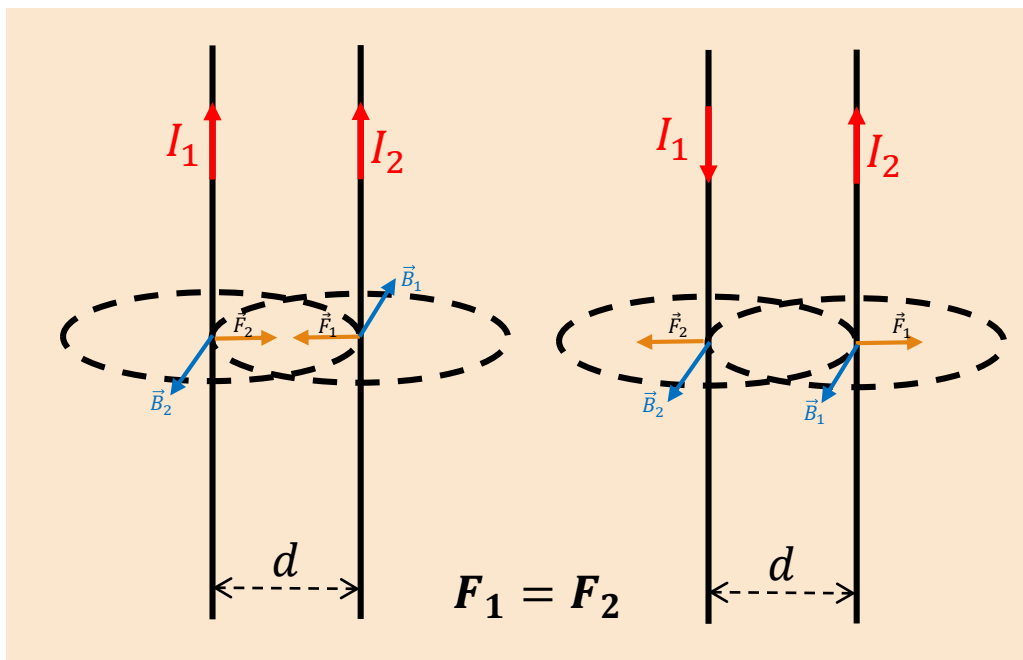
Prąd elektryczny powoduje obrót ramki!
(dąży do stanu $\vec{n} \parallel \vec{B}$)

$$M = B I b \underbrace{a \sin \alpha}_{\substack{\text{ramię} \\ \text{pary sił}}} = B I S \sin \alpha$$

$$\alpha = \angle(\vec{n}, \vec{B})$$

Ramka z prądem to **DIPOL MAGNETYCZNY**

Oddziaływanie dwóch prostoliniowych przewodników z prądem



$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

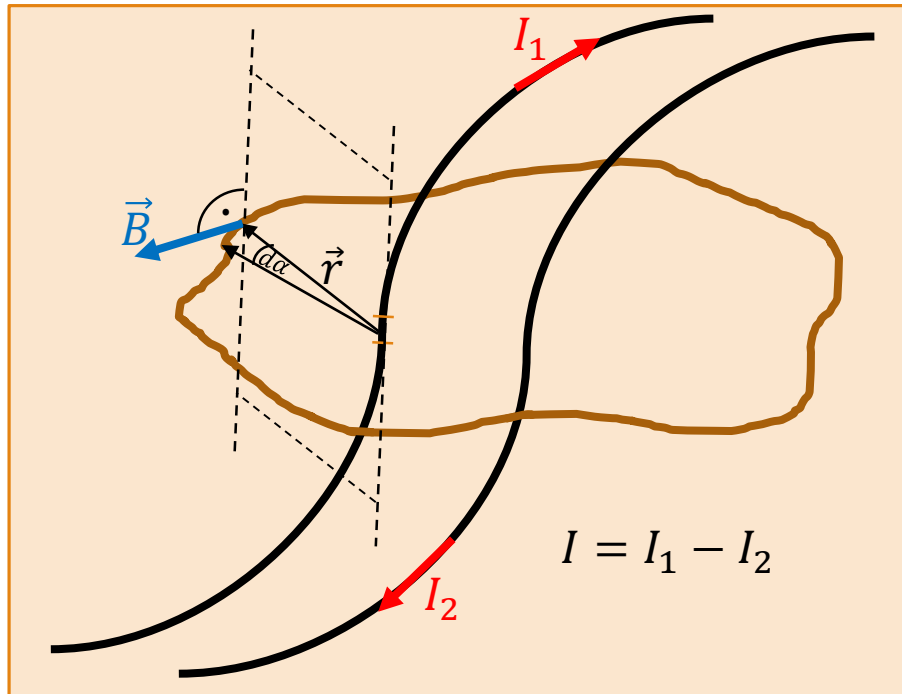
$$F_1 = B_1 I_2 l = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d} l$$

„Amper – natężenie stałego prądu elektrycznego, który płynąc w dwóch równoległych, nieskończenie długich prostoliniowych przewodnikach o przekroju okrągłym, znikomo małym i znajdujących się w próżni w odległości 1[m] od siebie, powoduje przyciąganie się tych przewodników z siłą $2 \cdot 10^{-7}$ [N] na każdy metr długości przewodu” [4].

$$2 \cdot 10^{-7} \text{ [N]} = \frac{\mu_0}{2\pi} \text{ [A}^2\text{]} \rightarrow \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\frac{\text{N}}{\text{A}^2} \right]$$

Prawo Ampere'a

Cyrkulacja wektora magnetycznego \vec{B} wzdłuż zamkniętego konturu C :



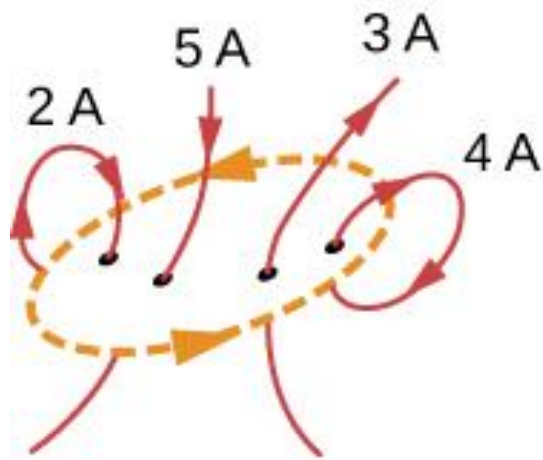
$$\vec{B} \cdot d\vec{L} = Br d\alpha$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{L} = \frac{\mu_0}{2\pi r} I \oint_0^{2\pi} r d\alpha = \frac{\mu_0}{2\pi} I \oint_0^{2\pi} d\alpha$$

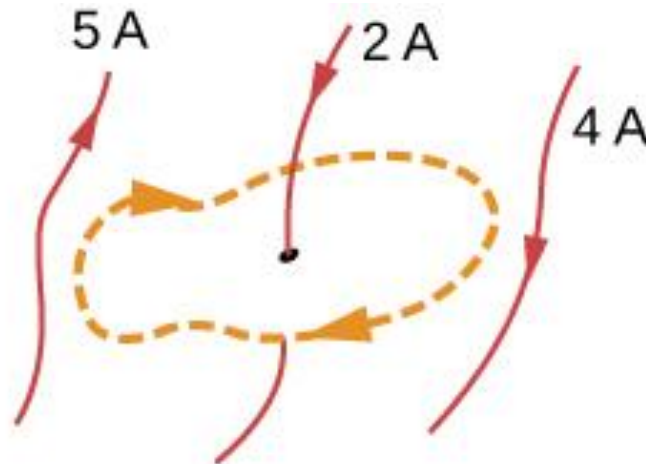
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 I \quad \quad \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 \sum_{i=1}^n I_i$$

Całka nie zależy od krzywej L !

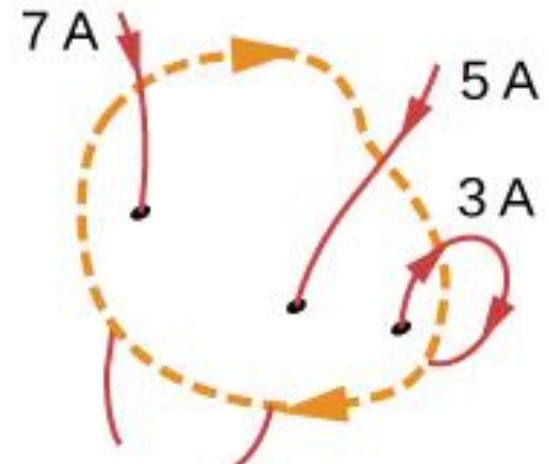
Wypadkowe natężenia prądu przepływającego przez kontur całkowania



(a)



(b)

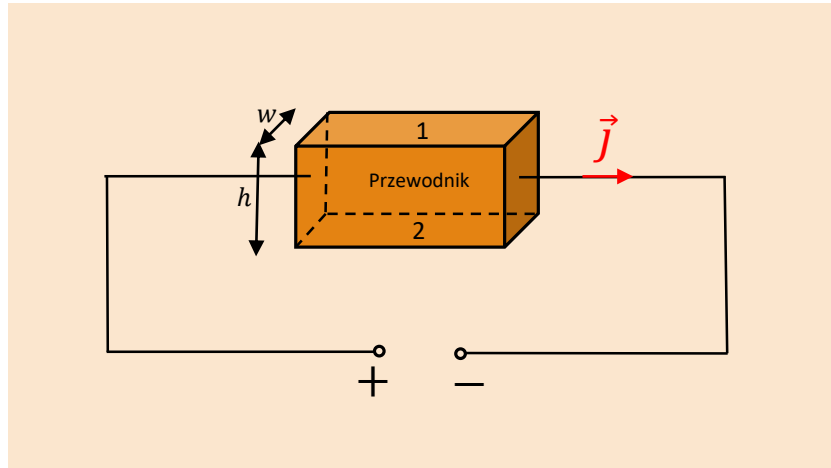


(c)

Treści dostępne za darmo na
<https://openstax.org/books/fizyka-dla-szk%C3%B3%C5%82-wy%C5%BCszych-tom-2>

Efekt Halla

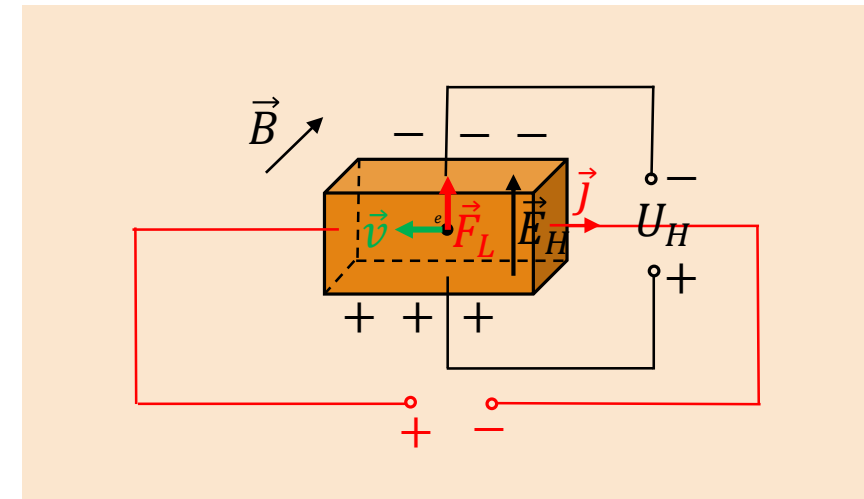
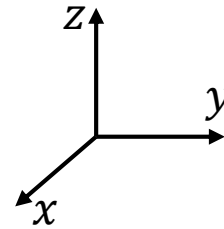
Brak pola magnetycznego $\vec{B} = 0$:



$$j = nqv \quad I = jhw$$

$$U_{12} = 0$$

Jednorodne pole magnetyczne $\vec{B} = -B\vec{i} \neq 0$:



$$\vec{F}_L = q(\vec{v} \times \vec{B})$$

Zwrot poprzecznego pola elektrycznego zależy od znaku nośników ładunku elektrycznego!

Efekt Halla c. d.

Poprzeczne pole elektryczne równoważy siłę Lorentza – ładunek przestaje się przemieszczać:

$$qE_H = qvB$$

$$E_H = vB$$

$$E_H = \underbrace{\left(\frac{1}{nq}\right)jB}_{R_H}$$

E_H - natężenie poprzecznego pola elektrycznego

R_H - stała Halla

Mała koncentracja nośników ładunku elektrycznego prowadzi do dużego napięcia Halla (PÓŁPRZEWODNIKI)!

$$U_H = h E_H$$

*pomiar I, B, U_H i w
umożliwia
obliczenie stałej
Halla i koncentrację n
tzw. metoda Halla*

$$U_H = \frac{R_H}{w} IB$$

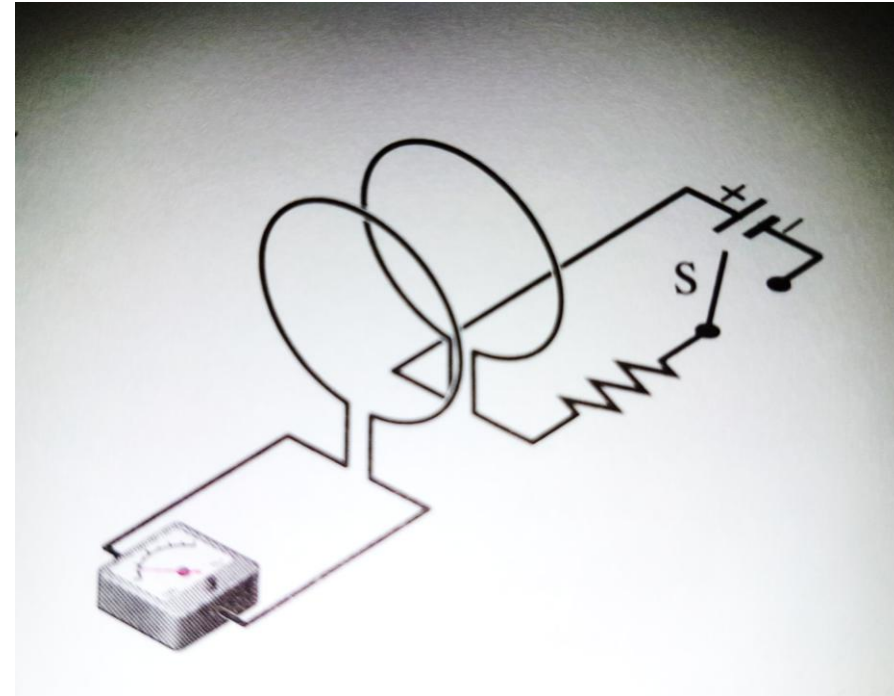
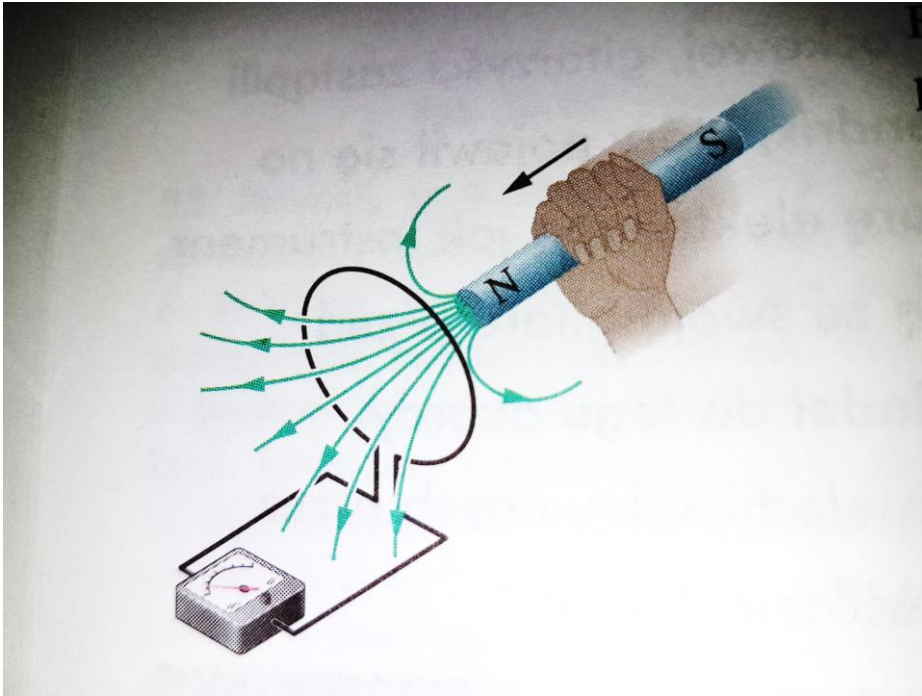
$$R_H = \frac{wU_H}{IB}$$

Mierząc R_H w różnym przedziale temperatur stwierdzono, że dla półprzewodników współczynnik ten zazwyczaj maleje ze wzrostem temperatury!

Indukcja elektromagnetyczna

W pętli indukuje się prąd – **prąd indukowany**.

Praca - przypadająca na jednostkę ładunku - wykonana w celu wytworzenia prądu to **indukowana siła elektromotoryczna (SEM) \mathcal{E}** .
SEM \mathcal{E} jest indukowana, gdy zmienia się liczba linii pola magnetycznego (ilość pola magnetycznego), przechodzącego przez pętlę.



Prawo Faradaya

$$\mathcal{E} = - \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Dla cewki o N zwojach:

$$\mathcal{E} = -N \frac{d\Phi_B}{dt}$$

Strumień magnetyczny przechodzący przez cewkę można zmieniać:

- 1) przez zmianę wartości wektora \vec{B} pola w cewce,
- 2) przez zmianę powierzchni cewki lub tej części powierzchni, która znajduje się w polu magnetycznym,
- 3) przez zmianę kąta między kierunkiem wektora \vec{B} a powierzchnią cewki.

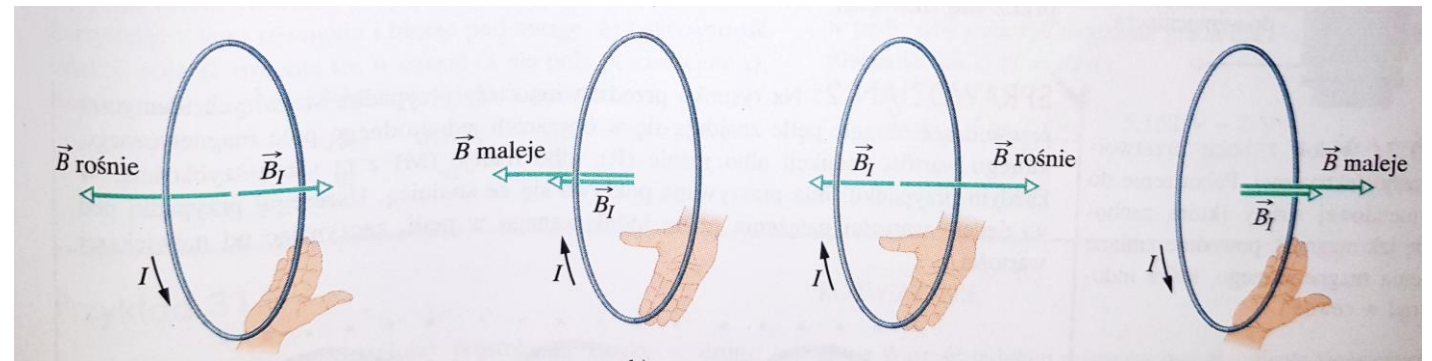
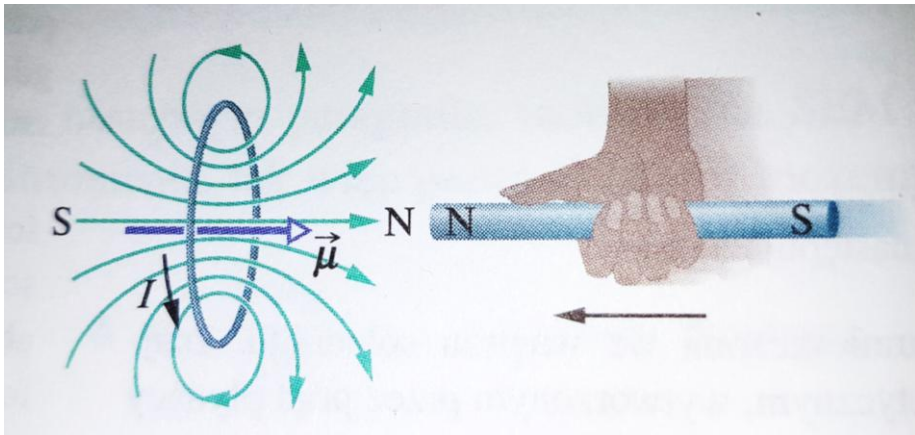
1. Indukcyjne pole elektryczne nie jest wywoływane przez ładunki elektryczne.

2. Linie sił pola indukcyjnego tworzą zamknięte pętle, dlatego pole to nazywa się polem wirowym.

3. Pole indukcyjne nie jest polem zachowawczym – praca przy przemieszczaniu ładunku po obwodzie zamkniętym jest różna od zera.

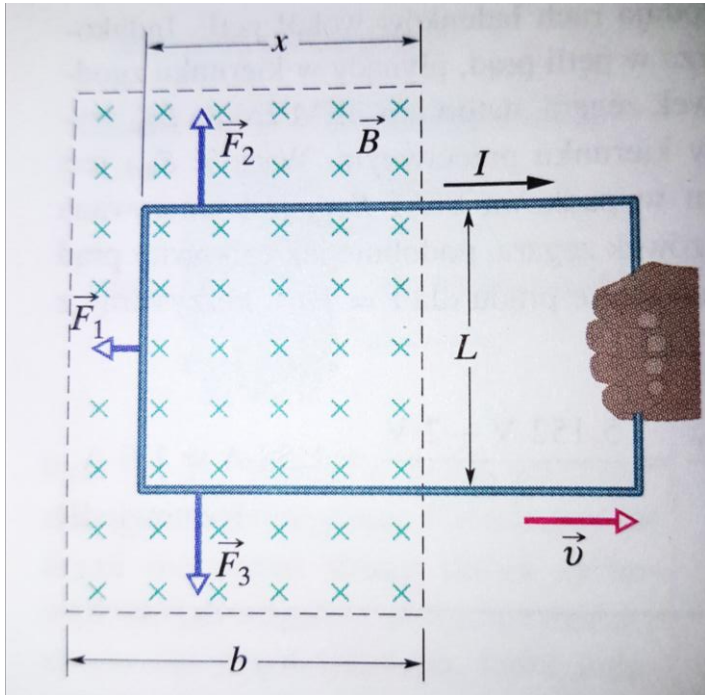
Reguła Lentza

Prąd indukowany płynie w takim kierunku, że wytworzone przez niego pole magnetyczne przeciwdziała **zmianie** strumienia pola magnetycznego, która ten prąd indukuje.

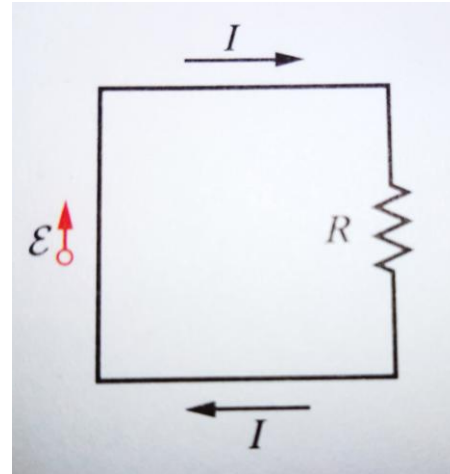


\vec{B} – wektor indukcji pola magnetycznego, którego zmiana indukuje prąd wytwarzający pole magnetyczne \vec{B}_I

Przykład – przekazywanie energii



\vec{F} - siła jaką człowiek działa na ramkę
 $\vec{F} = -\vec{F}_1$



$$\Phi_B = BS = BLx$$

$$\varepsilon = \frac{d\Phi_B}{dt} = BLv$$

$$I = \frac{\varepsilon}{R} = \frac{BLv}{R}$$

$$F = F_1 = ILB \sin 90^\circ = ILB$$

$$F = \frac{B^2 L^2 v}{R}$$

Szybkość wykonywania pracy:

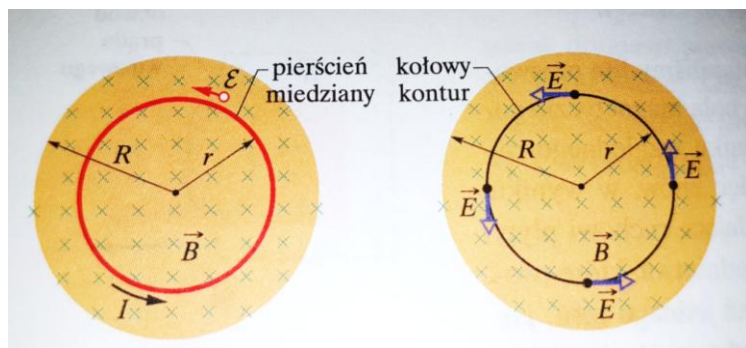
$$P = Fv = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

Szybkość wydzielania się energii termicznej:

$$P = I^2 R = \frac{B^2 L^2 v^2}{R}$$

Prawo Faradaya – nowe sformułowanie

Zmienne pole magnetyczne wytwarza pole elektryczne!



Indukowane pole elektryczne istnieje nawet wtedy, gdy usuniemy pierścień!

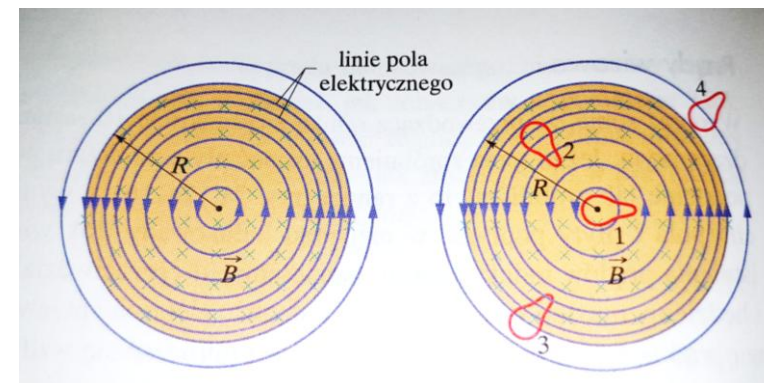
$$\int \vec{F} \cdot d\vec{l} = (q_0 E)(2\pi r) = \varepsilon q_0$$

$$\varepsilon = 2\pi r E$$

Indukowane pole elektryczne nie jest wytwarzane przez nieruchome ładunki, ale przez zmienny strumień magnetyczny!

Linie pola indukowanego tworzą zamknięte pętle!

Potencjał elektryczny jest zdefiniowany tylko dla pól elektrycznych wytwarzanych przez ładunki statyczne!



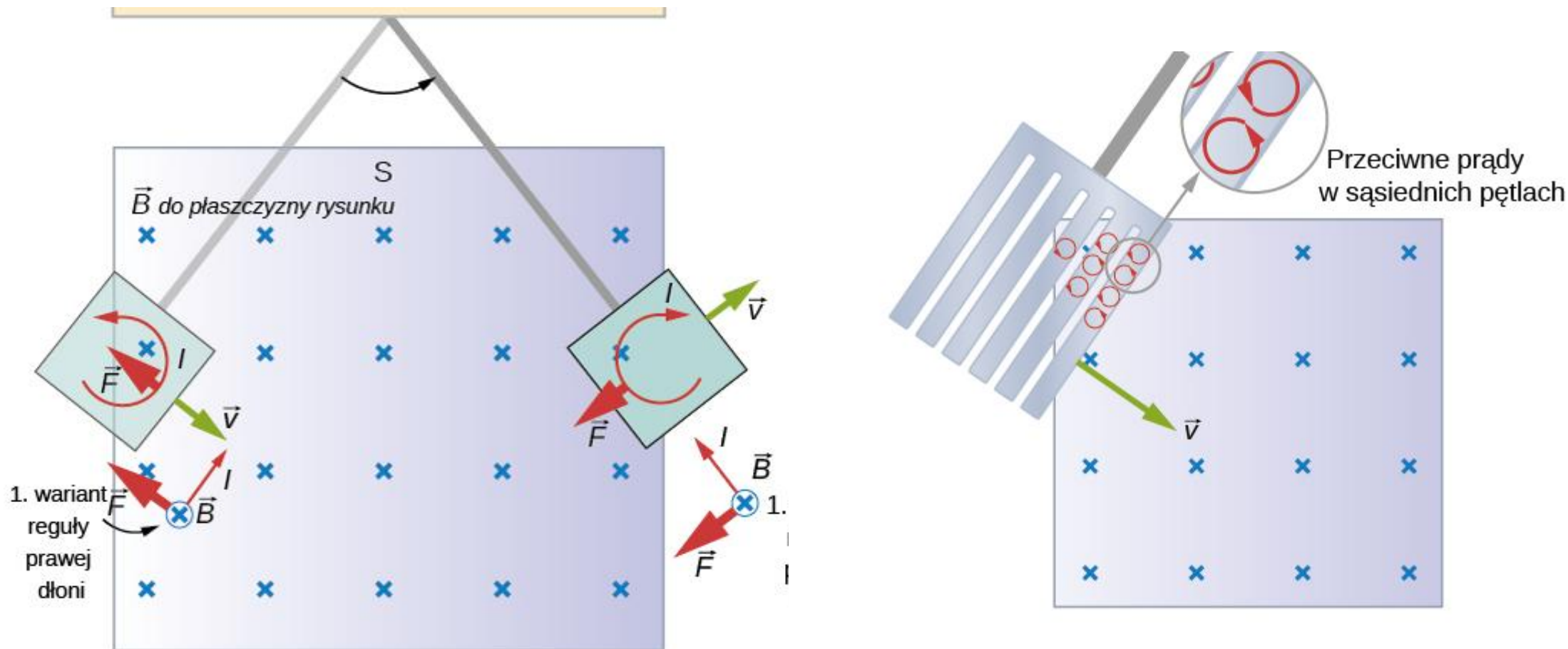
Wzdłuż konturu 1 i 2 indukują się takie same SEM!

Wzdłuż konturu 4 SEM nie indukuje się!

$$W = \oint \vec{F} \cdot d\vec{l} = q_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Prądy wirowe



Równania Maxwella

Prawo Gaussa:

$$\text{div} \vec{D} = \rho$$

Bez nazwy:

$$\text{div} \vec{B} = 0$$

Prawo Ampere'a:

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{L} = \mu_0 I$$

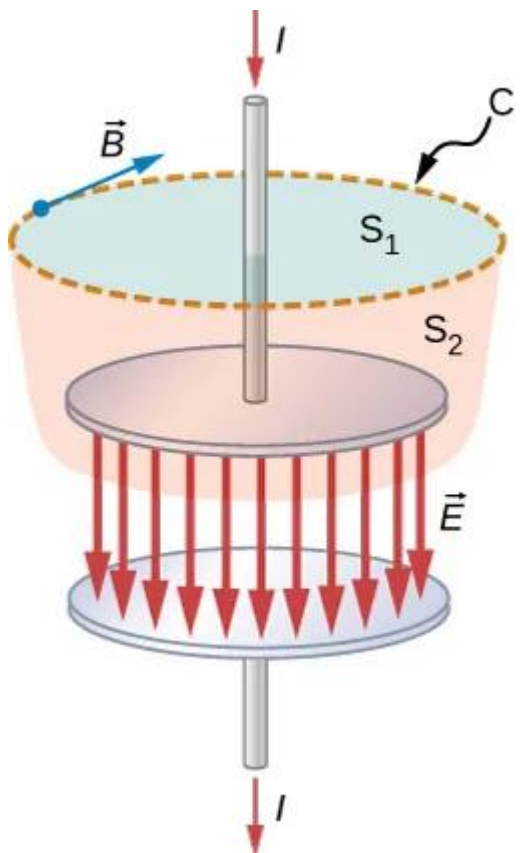
+ poprawka Maxwella

$$(\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$$

Prawo Faradaya:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_B}{dt}$$

Poprawka Maxwella



$$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

Przykłady

Zad. 1.

Wyznacz – stosując prawo Gaussa - natężenie pola elektrycznego i potencjał elektryczny w odległości r od środka równomiernie naładowanej ładunkiem przestrzennym (o gęstości ρ) kuli o promieniu R . Rozważ dwa przypadki: $r > R$ i $r < R$.

Zad. 2.

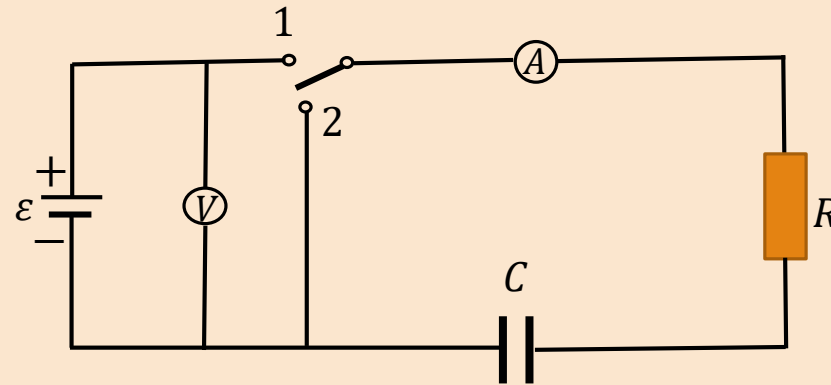
Porównaj obliczenia indukcji magnetycznej \vec{B} w punkcie P oddalonym o d od przewodnika prostoliniowego z wykorzystaniem prawa Biota i Savarta oraz z prawa Ampere'a.

Zad. 3.

Korzystając z prawa Ampere'a wyznacz indukcję pola magnetycznego wewnątrz i na zewnątrz długiego, prostoliniowego przewodnika, przyjmując, że ten przewód ma promień R , a przez jego przekrój poprzeczny płynie – równomiernie rozłożony – prąd o natężeniu I .

Przykłady

Zad. 4.

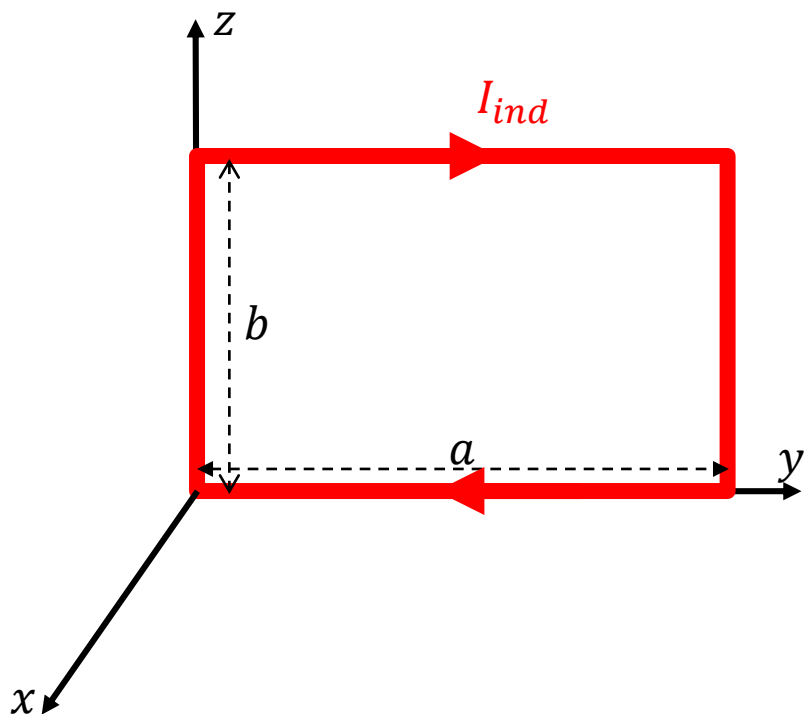


- a) Dla położenia klucza w pozycji 1 pokaż, że II prawo Kirchhoffa wynika z zasady zachowania energii.
- b) Dla położenia klucza w pozycji 1 oblicz o ile procent powiększy się ładunek zgromadzony na kondensatorze po czasie $\tau = RC$.
- c) Dla położenia klucza w pozycji 2 oblicz o ile procent zmniejszy się ładunek zgromadzony na kondensatorze po czasie $\tau = RC$.

Przykład – zamknięta przewodząca ramka

Zad. 5.

Wyznacz wartość SEM indukowaną w ramce jak na rysunku poniżej. $\vec{B} = Ct^2z^3\vec{i}$, $\vec{ds} = ds\vec{i}$, $C > 0$ jest wartością stałą.



$$\vec{B} = Ct^2z^3\vec{i}, \quad \vec{ds} = ds\vec{i}$$

$C > 0$ - stała

Literatura

1. D. Halliday, R. Resnick, Fizyka T. 2, PWN, W-wa 1972 (lub nowsze wydania).
2. J. Morawiec, Podstawy fizyki cz. II, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Pedagogicznej, Rzeszów 1998 (lub nowsze wydania).
3. A. Januszajtis, FIZYKA DLA POLITECHNIK T. 2 POLA, PWN, W-wa 1982 (lub nowsze wydania).
4. B. M. Jaworski, A. A. Piński, Elementy fizyki Tom 2, PWN, W-wa 1976 (lub nowsze wydania).
5. K. Krop, K. Chłędowska, Fizyka I pracownia, Oficyna Wydawnicza PRz
6. D. Holliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki T. 3, PWN, W-wa 2009 (lub inne wydania)