Wektory – przykłady zastosowania w fizyce

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Podstawowe modele matematyczne

1. Skalary (np. czas, droga, długość, objętość, temperatura, masa, energia)
2. Wektory (np. siła, prędkość, przyspieszenie)
3. Tensory (np. tensor momentu bezwładności, tensor naprężeń)
4. Funkcje (np. zależność wychylenia od czasu w ruchu drgającym)

Wektory a przestrzeń liniowa

Przestrzeń liniowa $(V, +, K, \cdot) \equiv V -$ to zbiór obiektów (np. **wektorów**), które można skalować (mnożyć przez elementy z **ciała liczbowego** $\boldsymbol{K}$) i dodawać.

Działania mnożenia $("\cdot": K \times V \to V)$ i dodawania $("+": V \times V \to V)$ elementów przestrzeni liniowej spełniają następujące aksjomaty:

1) $\bigwedge_{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V} \quad \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (łączność)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$[x_1, y_1] + [x_2 + x_3, y_2 + y_3] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] + [x_3, y_3] = [x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3]$$

Przestrzeń liniowa

2) $\bigwedge_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V} \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (przemienność)

Przykład: $[x,y] \in \mathbb{R}^2$

$$[x_1,y_1]+[x_2,y_2]=[x_1+x_2,y_1+y_2]=[x_2,y_2]+[x_1,y_1]=[x_2+x_1,y_2+y_1]$$

3) $\bigvee_{e \in V} \bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} \boldsymbol{e}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{v}$ (element neutralny w przestrzeni V)

Przykład: $[x,y] \in \mathbb{R}^2$

$$[0,0]+[x,y]=[\mathrm{x},y]$$

Przestrzeń liniowa

4) $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} \bigvee_{\boldsymbol{v}' \in V} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}$ (element odwrotny)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$[x, y] + [-\mathrm{x}, -\mathrm{y}] = [-x, -y] + [x, y] = [0,0]$$

Zbiór $(V, +)$ spełniający powyższe 4-ry aksjomaty tworzy **grupę abelową.**

Przestrzeń liniowa

5) $\bigwedge_{\substack{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V \\ \alpha \in K}} \alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \alpha\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$ (rozdzielność mnożenia przez skalar wzg. dodawania)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha[x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [\alpha x_1 + \alpha x_2, \alpha y_1 + \alpha y_2] = \alpha[x_1, y_1] + \alpha[x_2, y_2]$$

6) $\bigwedge_{\substack{\boldsymbol{v} \in V \\ \alpha,\beta \in K}} (\alpha+\beta)\boldsymbol{v} = \alpha\boldsymbol{v} + \beta\boldsymbol{v}$ (rozdzielność mnożenia przez wektor wzg. dodawania)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$(\alpha+\beta)[x, y] = [\alpha x+\beta x, \alpha y+\beta y] = [(\alpha+\beta)x, (\alpha+\beta)y] = [\alpha x, \alpha y] + [\beta x, \beta y] = \alpha[x, y] + \beta[x, y]$$

Przestrzeń liniowa

7) $\bigwedge_{\substack{\boldsymbol{v} \in V \\ \alpha, \beta \in K}} \quad \alpha(\beta\boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$ (zgodność mnożenia przez skalar z mnożeniem skalarów)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha\,(\beta[x, y]) = \alpha[\beta x, \beta y] = [\alpha\beta x, \alpha\beta y] = \alpha\beta[x, y]$$

8) $\bigvee_{1 \in K} \bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} 1v = v$ (1 to element neutralny w ciele K)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$1[x, y] = [1x, 1y] = [x, y]$$

Przestrzeń wektorowa

Przestrzeń wektorowa $(V, +, \mathbb{R}, \cdot) \equiv V$ to przestrzeń liniowa, która posiada skończenie wymiarowy układ **liniowo niezależnych** generatorów $\boldsymbol{e_{1,}}\, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n} \in V$ zwany **bazą**

$$\{\boldsymbol{e_{1,}}\, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\} \equiv \{\boldsymbol{e_i}\}_{i \in \tilde{n}}$$

wówczas przestrzeń wektorową V oznaczamy następująco:

$$\boldsymbol{V = lc_K\{e_{1,}\, e_2, \dots, e_n\} \equiv lc_K\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}}$$

Liczbę elementów bazy nazywamy **wymiarem** przestrzeni V i oznaczamy: $\mathbf{dim}\, \boldsymbol{V = n}$.

Układ wektorów $\boldsymbol{v_{1,}}\, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$ (elementów przestrzeni wektorowej), $n \geq 2$, jest liniowo niezależny jeżeli dla $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ ze związku $\sum_{i=1}^{n} c_i\, \boldsymbol{v_i} = 0$ wynika, że: $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny na przestrzeni liniowej $(V,+,\mathbb{R},\cdot)$ to odwzorowanie

$$\langle * \mid * \rangle : V \times V \ni \left(\vec{A},\vec{B}\right) \mapsto \left\langle \vec{A} \middle| \vec{B} \right\rangle \in \mathbb{R},$$

spełniające dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $\vec{A},\vec{B},\vec{C} \in V$ następujące warunki:

$$\left\langle \vec{A} \middle| \vec{B} \right\rangle = \left\langle \vec{B} \middle| \vec{A} \right\rangle, \left\langle \overrightarrow{\alpha A} \middle| \vec{B} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{B} \middle| \vec{A} \right\rangle,$$

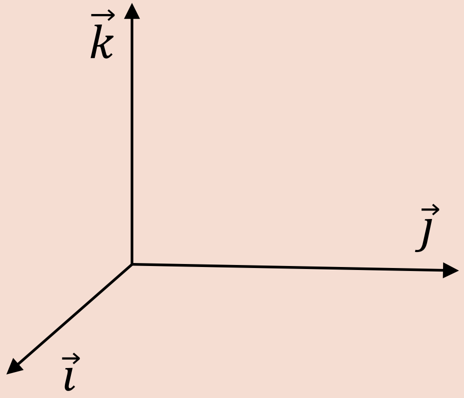
$$\left\langle \vec{A} + \vec{B} \middle| \vec{C} \right\rangle = \left\langle \vec{A} \middle| \vec{C} \right\rangle + \left\langle \vec{B} \middle| \vec{C} \right\rangle, \ \left\langle \vec{A} \middle| \vec{A} \right\rangle \in \mathbb{R}_0^+,$$

$$\left\langle \vec{A} \middle| \vec{A} \right\rangle = 0 \Longrightarrow A = 0,$$

gdzie (**iloczyn kartezjański** zbiorów V_1 i V_2): $V_1 \times V_2 \overset{def}{=} \left\{\left(\vec{A},\vec{B}\right) \mid \vec{A} \in V_1 \wedge \vec{B} \in V_2\right\}$

Iloczyn skalarny w rzeczywistej przestrzeni kartezjańskiej

Rzeczywista przestrzeń kartezjańska *3* – wymiarowa



$$\mathbb{R}^3 = lc_{\mathbb{R}}\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$$

$$\boldsymbol{\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\sphericalangle(\vec{A},\vec{B})}$$

$$\boldsymbol{\vec{A} = A\vec{e}_A} \qquad \boldsymbol{\vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A}} \qquad |\boldsymbol{\vec{e}_A}| = 1$$

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\cdot\left(B_x\vec{i} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right) = (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \in \mathbb{R}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = \left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right)\cdot\left(A_x\vec{i} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right) = (A_x)^2 + \left(A_y\right)^2 + (A_z)^2 = \boldsymbol{A^2} \in \mathbb{R}$$

$$\vec{A}\cdot\vec{A} = A\vec{e}_A\cdot A\vec{e}_A = A^2\vec{e}_A\cdot\vec{e}_A \overset{def}{\triangleq} A^2\left(1\cdot 1\cos 0^\circ\right) = A^2 \rightarrow A = \sqrt{(A_x)^2 + \left(A_y\right)^2 + (A_z)^2}$$

Baza ortogonalna i ortonormalna

Baza $\{\boldsymbol{e}_i\}_{i\in\tilde{n}}$ **jest:**

ortogonalna gdy: $\vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_j \equiv \langle \boldsymbol{e}_i | \boldsymbol{e}_j \rangle = \boldsymbol{c}_i \boldsymbol{\delta}_{ij}; \boldsymbol{c}_i \neq \boldsymbol{0}; \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \tilde{\boldsymbol{n}}$

ortonormalna gdy: $\vec{\boldsymbol{e}}_i \cdot \vec{\boldsymbol{e}}_j \equiv \langle \boldsymbol{e}_i | \boldsymbol{e}_j \rangle = \boldsymbol{\delta}_{ij};\ \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j} \in \tilde{\boldsymbol{n}}$

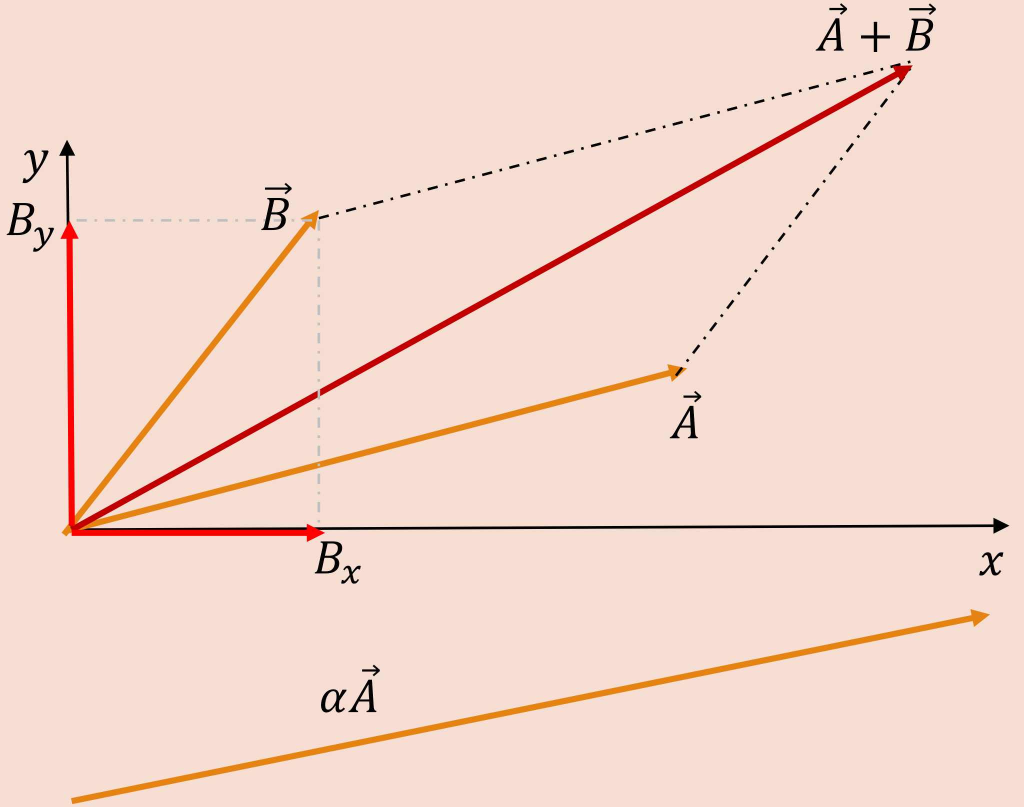
Delta Kroneckera:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{gdy } i = j \\ 0, \text{gdy } i \neq j \end{cases}; i, j \in \tilde{n}$$

Przedstawienia wektora

Przykład: $\mathbb{R}^2 = lc_{\mathbb{R}}\{\vec{i},\vec{j}\}$

Geometryczne przedstawienie wektora



Algebraiczne przedstawienie wektora

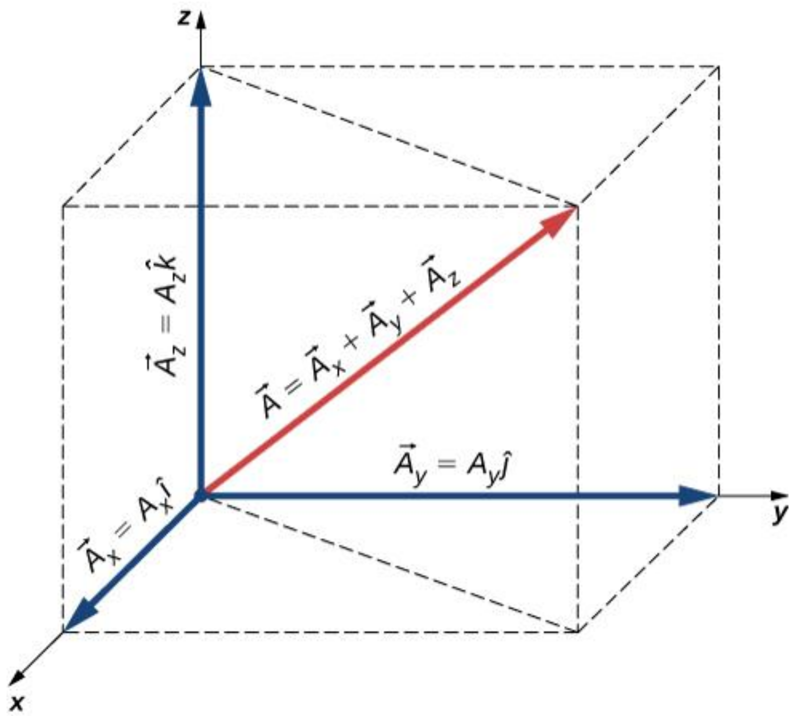
$$\vec{A} = [A_x, A_y], \quad \vec{B} = [B_x, B_y]$$

$$\vec{A}+\vec{B} = [A_x + B_x, A_y + B_y]$$

$$\alpha\vec{A} = [\alpha A_x, \alpha A_y]$$

Przedstawienia wektora

Przykład: $\mathbb{R}^3 = lc_{\mathbb{R}}\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$



Trzy wektory jednostkowe definiują układ współrzędnych kartezjańskich w przestrzeni trójwymiarowej. Od kolejności podpisywania osi zależy orientacja układu współrzędnych. Układ przedstawiony na rysunku jest układem prawoskrętnym.

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej jest sumą swoich składowych.

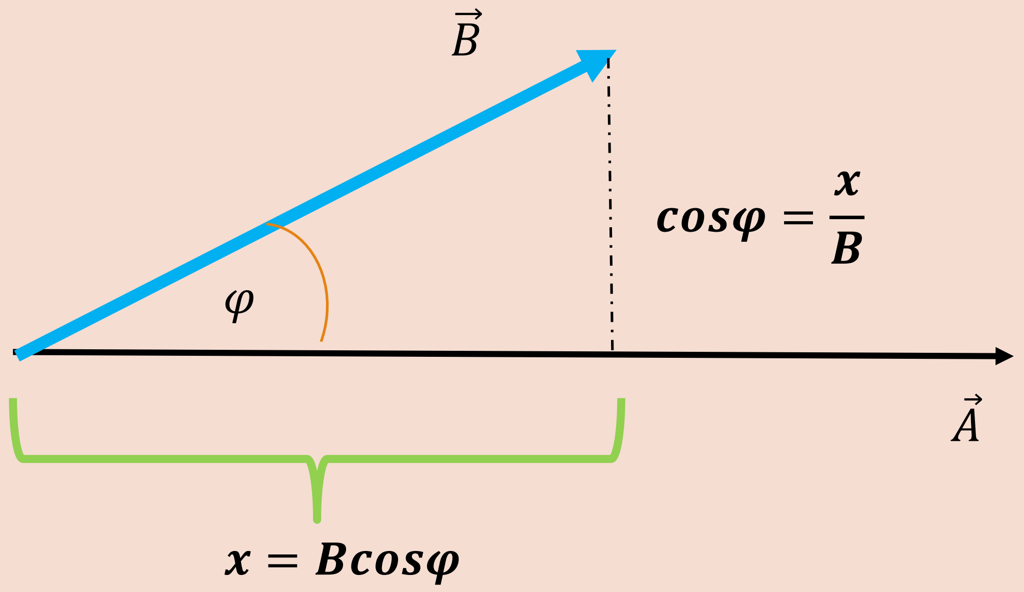
Treści dostępne za darmo na:
https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/2-2-uklady-wspolrzednych-i-skladowe-wektora

Interpretacja geometryczna iloczynu skalarnego wektorów w $\mathbb{R}^3$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| cos\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$|\vec{A}| \equiv A$$

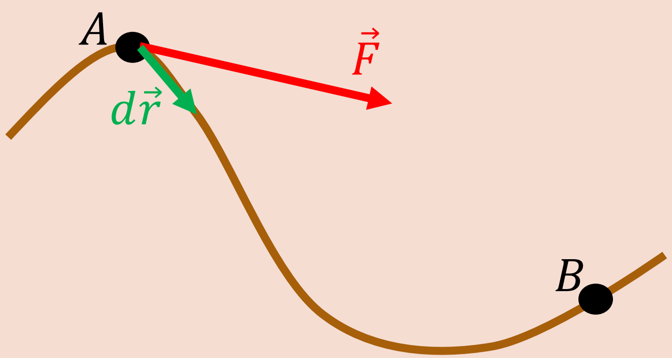
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ABcos\varphi$$

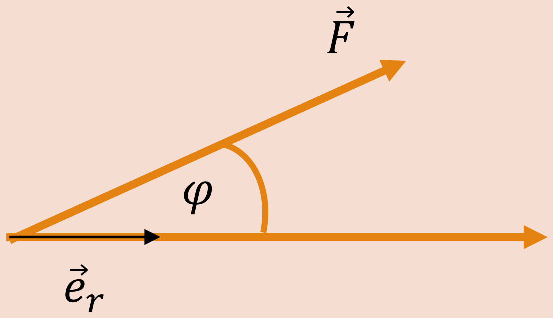


Wybrane zastosowania iloczynu skalarnego: **praca siły**

Praca W siły $\vec{F}$ na drodze $\overrightarrow{\Delta r}$

$$\boldsymbol{W} = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \overrightarrow{\boldsymbol{\Delta r}} = |\vec{\boldsymbol{F}}||\overrightarrow{\boldsymbol{\Delta r}}| \cos\sphericalangle(\vec{\boldsymbol{F}}, \overrightarrow{\boldsymbol{\Delta r}})$$

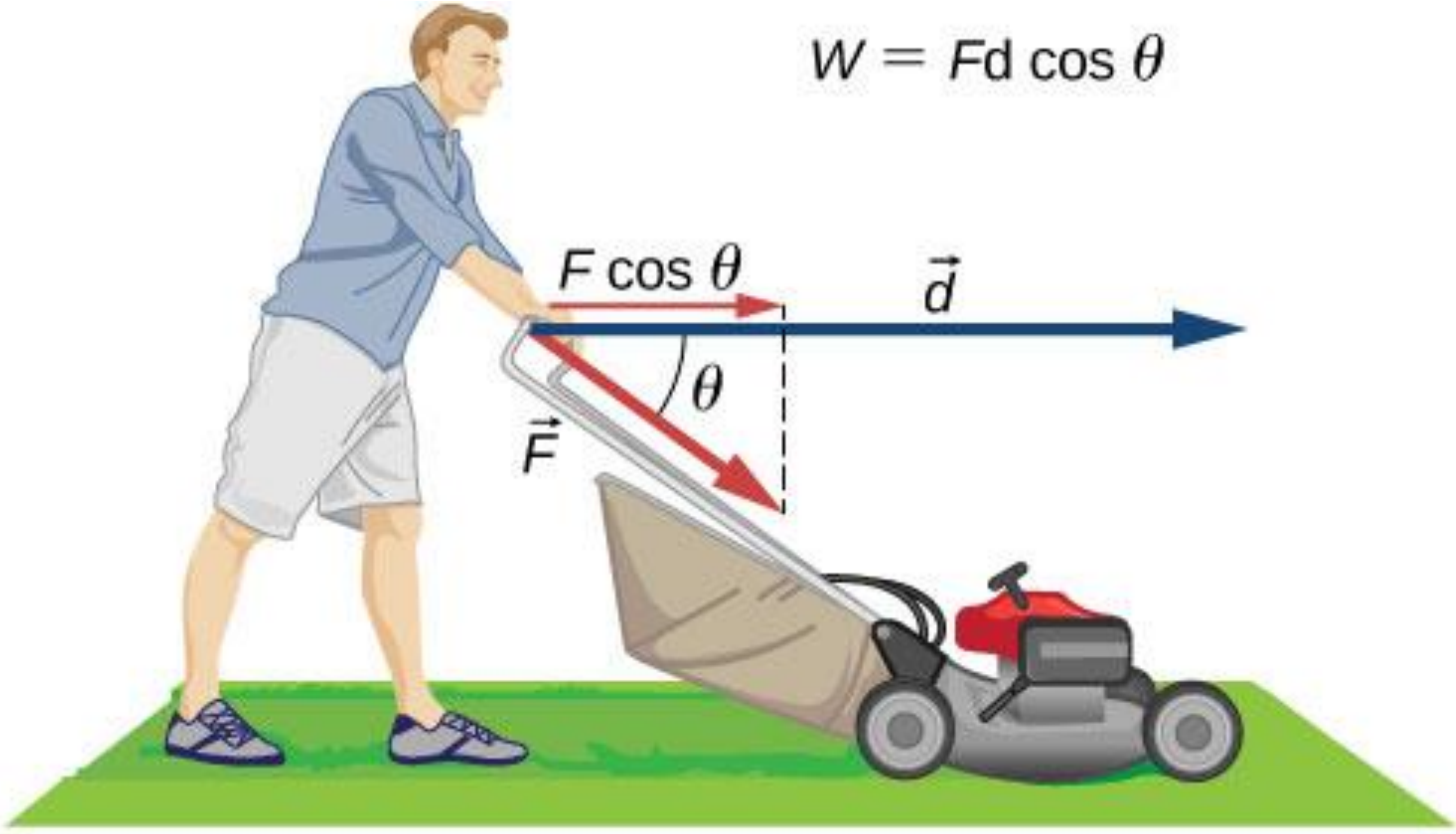




$$\overrightarrow{\Delta r} = |\overrightarrow{\Delta r}|\vec{e}_r \equiv \Delta r \vec{e}_r$$

$$\sphericalangle(\vec{F}, \overrightarrow{\Delta r}) \equiv \varphi$$

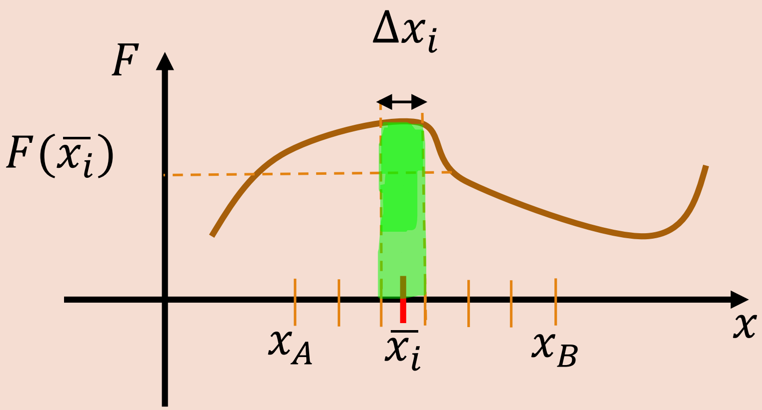
Praca stałej siły



Wybrane zastosowania iloczynu skalarnego: **praca siły zależnej od x**

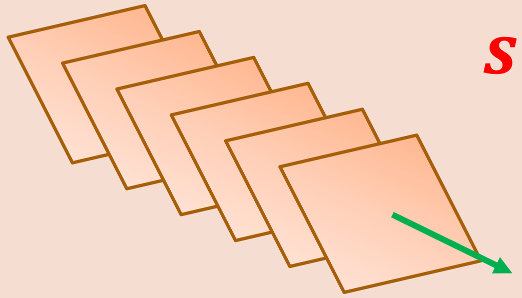
$$\boldsymbol{W = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

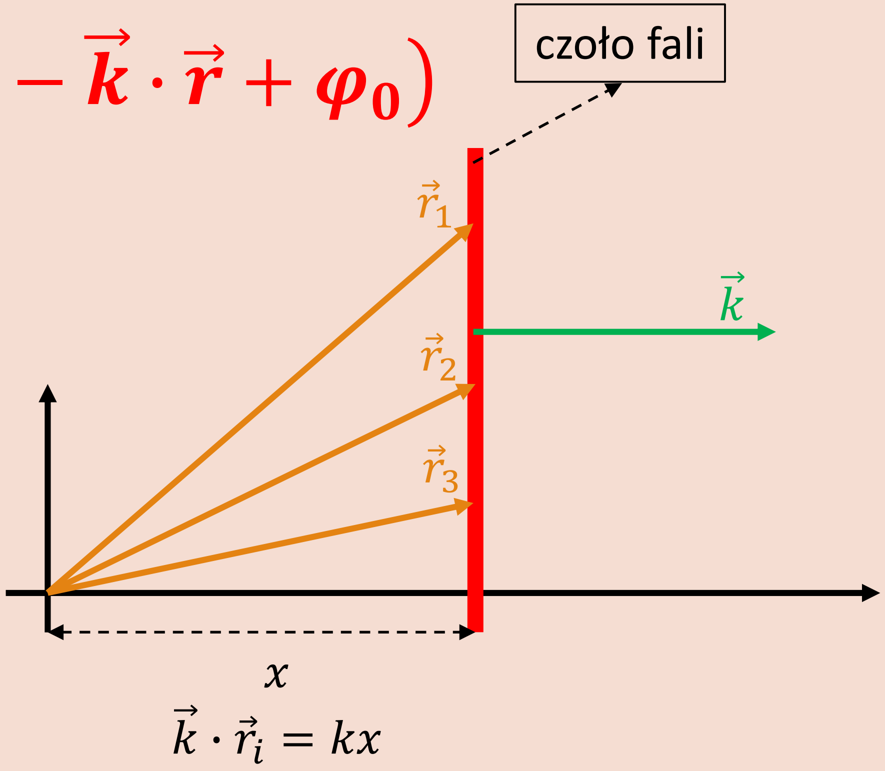


$$\boldsymbol{W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F(\bar{x}_i)\Delta x_i}$$

Wybrane zastosowania iloczynu skalarnego: **fala harmoniczna płaska**



$$\boldsymbol{s(\vec{r},t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)}$$



ω – częstość kołowa w $\left[\frac{1}{s}\right]$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$

$\vec{k}$ - wektor falowy, $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$

λ – długość fali

$\vec{r}$ - wektor wodzący punktu drgającego

φ_0 - faza początkowa

Macierze

Macierz A o rozmiarze $m \times n$ (m wierszy, n kolumn):

$$\left[a_{ij}\right]_{mn} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv A, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Mnożenie macierzy przez liczbę $\alpha \in K$:

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dodawanie macierzy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy

Mnożyć można wyłącznie macierze, z których pierwsza ma tyle kolumn, co druga wierszy.

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{c_{i,j}} = \sum_{\boldsymbol{r=1}}^{\boldsymbol{m}} \boldsymbol{a_{i,r} b_{r,j}}$$

$$i = 1, \dots, n \qquad\qquad j = 1, \dots, p$$

m – ilość kolumn w macierzy A równa ilości wierszy w macierzy B

n – ilość wierszy w macierzy A

p – ilość kolumn w macierzy B

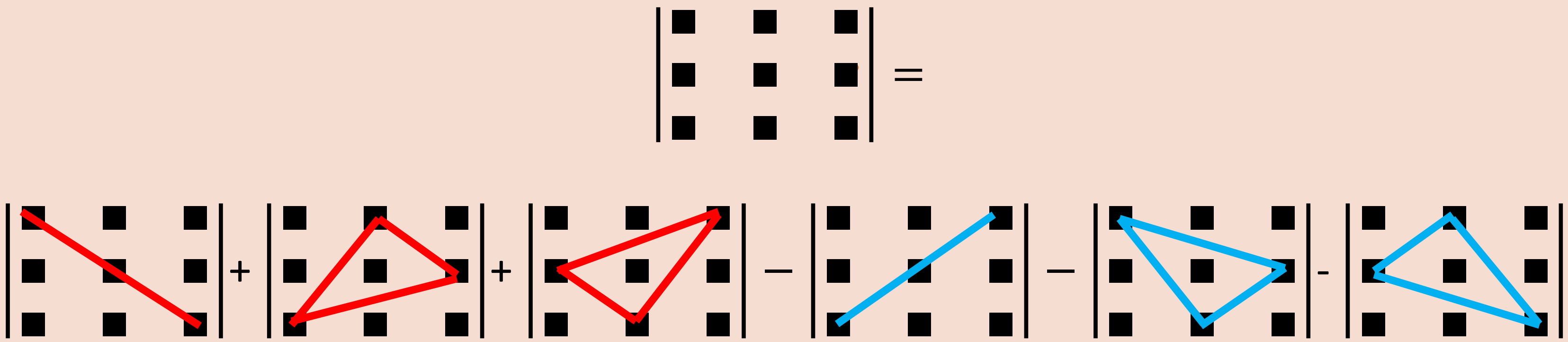
Wyznacznik macierzy kwadratowej

$$|A| \equiv \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \varepsilon_{k_1k_2,\ldots,k_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$$

Suma rozciąga się na wszystkie możliwe permutacje liczb 1,2, … n

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{gdy permutacja } k_1k_2 \ldots k_n \text{ jest parzysta} \\ -1, & \text{gdy permutacja } k_1k_2 \ldots k_n \text{ jest nieparzysta} \end{cases}$$

Wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia 3



Reprezentacja macierzowa wektorów

Baza kanoniczna w $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{j} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\langle \vec{A} | \vec{B} \rangle = \vec{A}^T \vec{B}$$

Dla $A \equiv [a_{ij}]_{mn}$; $A^T \equiv [a_{ij}]_{nm}$

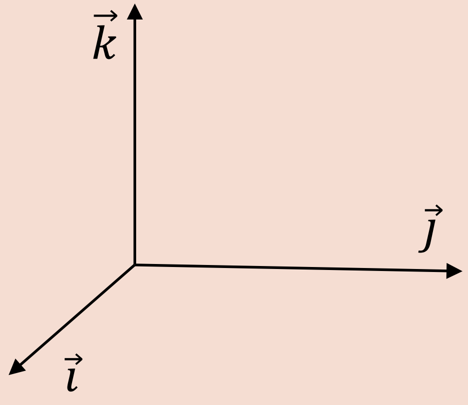
$$\vec{A} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}, \vec{A}^{\boldsymbol{T}} = [A_x \quad A_y \quad A_z]$$

$$\langle \vec{A} | \vec{B} \rangle = [A_x \quad A_y \quad A_z] \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} =$$

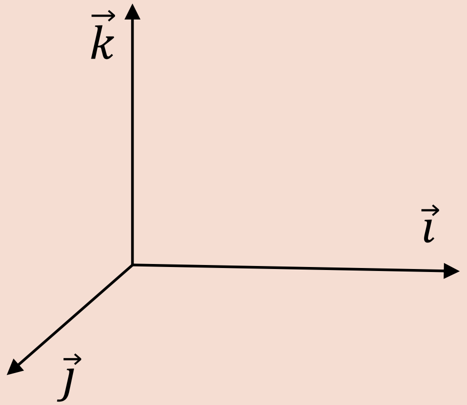
$$= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Przestrzeń zorientowana

Przestrzeń z zadanym układem współrzędnych jest **zorientowana**!



Układ zorientowany w prawo



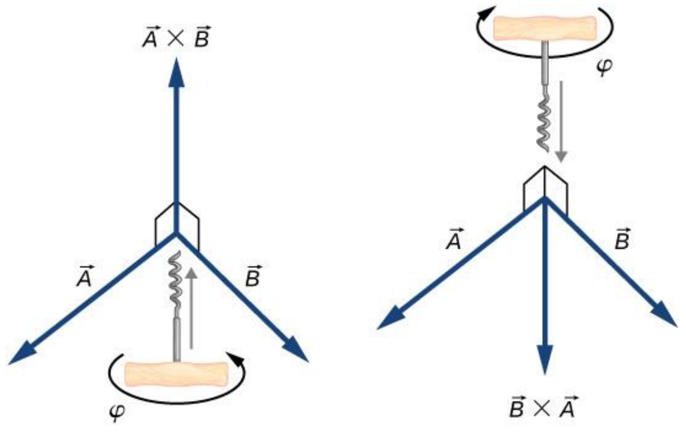
Układ zorientowany w lewo

Iloczyn wektorowy w rzeczywistej przestrzeni kartezjańskiej ($\mathbb{R}^3$)

$$\vec{\boldsymbol{A}} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k} \equiv [A_x, A_y, A_z] = \boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{A}} \quad \vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{B}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{B}}$$

$$\vec{\boldsymbol{C}} = \boldsymbol{C}\vec{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{C}} = \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{\imath}}(\boldsymbol{A_yB_z} - \boldsymbol{A_zB_y}) + \vec{\boldsymbol{\jmath}}(\boldsymbol{A_zB_x} - \boldsymbol{A_xB_z}) + \vec{\boldsymbol{k}}(\boldsymbol{A_xB_y} - \boldsymbol{A_yB_x})$$

$$\boldsymbol{C} = |\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}| = \boldsymbol{A\,B\,sin}\sphericalangle(\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}})$$



Treści dostępne za darmo na:
https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/2-2-uklady-wspolrzednych-i-skladowe-wektora

Własności Iloczynu wektorowego ($\mathbb{R}^3$)

Wektor $\vec{\boldsymbol{C}}$ jest wektorem normalnym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{\boldsymbol{A}}$ i $\vec{\boldsymbol{B}}$, o zwrocie takim, że trójka $\left(\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}}, \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right)$ ma orientację zgodną z orientacją przestrzeni.

Własności iloczynu wektorowego dla dowolnych $\vec{\boldsymbol{A}}, \vec{\boldsymbol{B}}, \vec{\boldsymbol{C}} \in V$ i $c \in \mathbb{R}$:

$$\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = -\vec{\boldsymbol{B}} \times \vec{\boldsymbol{A}}$$

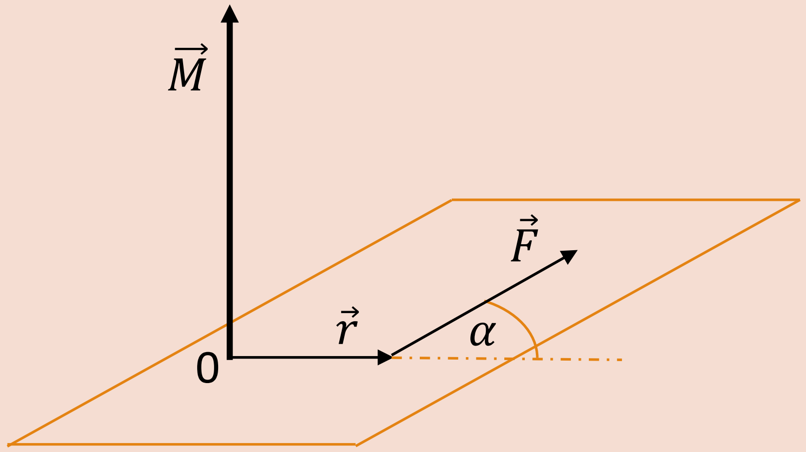
$$\vec{\boldsymbol{C}} \times \left(\vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{B}}\right) = \vec{\boldsymbol{C}} \times \vec{\boldsymbol{A}} + \vec{\boldsymbol{C}} \times \vec{\boldsymbol{B}}$$

$$\left(c\vec{\boldsymbol{A}}\right) \times \vec{\boldsymbol{B}} = c\left(\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}}\right), \quad \vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{0} \Leftrightarrow \vec{\boldsymbol{A}} \parallel \vec{\boldsymbol{B}}$$

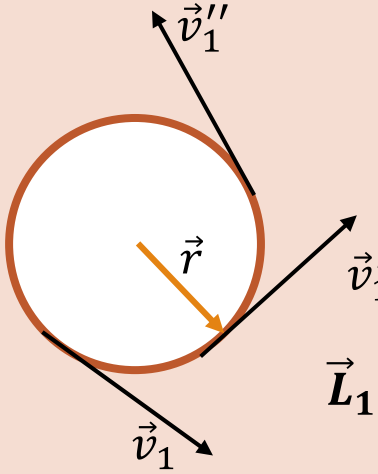
Wybrane zastosowania iloczynu wektorowego: **moment siły wzg. punktu**

$$\vec{\boldsymbol{M}} = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}$$

$$\left|\vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{F}}\right| = |\vec{\boldsymbol{r}}|\left|\vec{\boldsymbol{F}}\right| \boldsymbol{sin\alpha}$$



Wybrane zastosowania iloczynu wektorowego: **moment pędu**

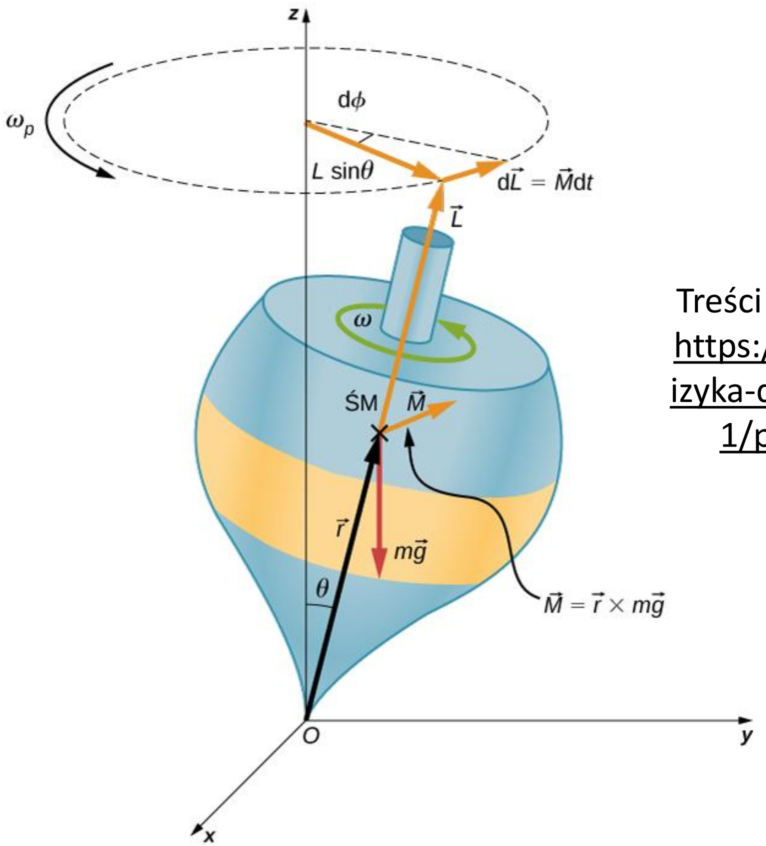


$$\vec{\boldsymbol{p}}_1 = m\vec{\boldsymbol{v}}_1$$

$$\vec{\boldsymbol{p}}_1' = m\vec{\boldsymbol{v}}_1'$$

$$\vec{\boldsymbol{L}}_1 = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}}_1 = \vec{\boldsymbol{L}}_1' = \vec{\boldsymbol{r}} \times \vec{\boldsymbol{p}}_1'$$

$\vec{p}$ - pęd, $\vec{v}$ - prędkość liniowa

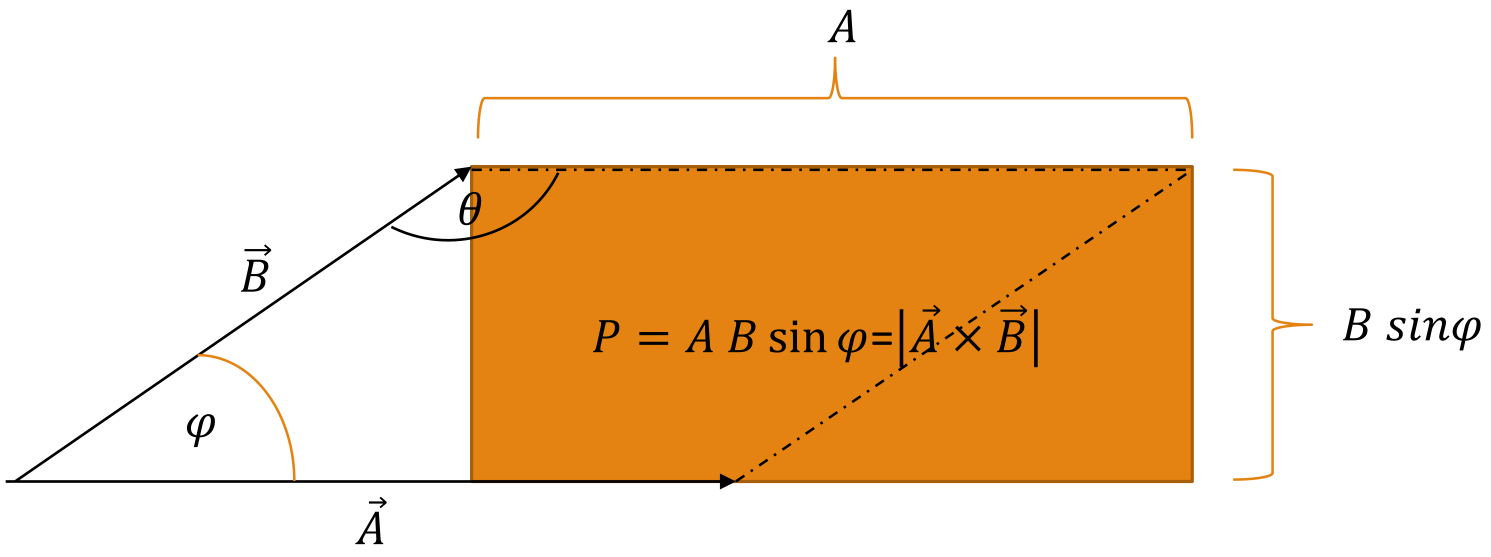


Treści dostępne za darmo na https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/11-4-precesja-zyroskopu

Interpretacja geometryczna iloczynu wektorowego

Moduł iloczynu wektorowego $\vec{A} \times \vec{B}$ jest równy polu równoległoboku

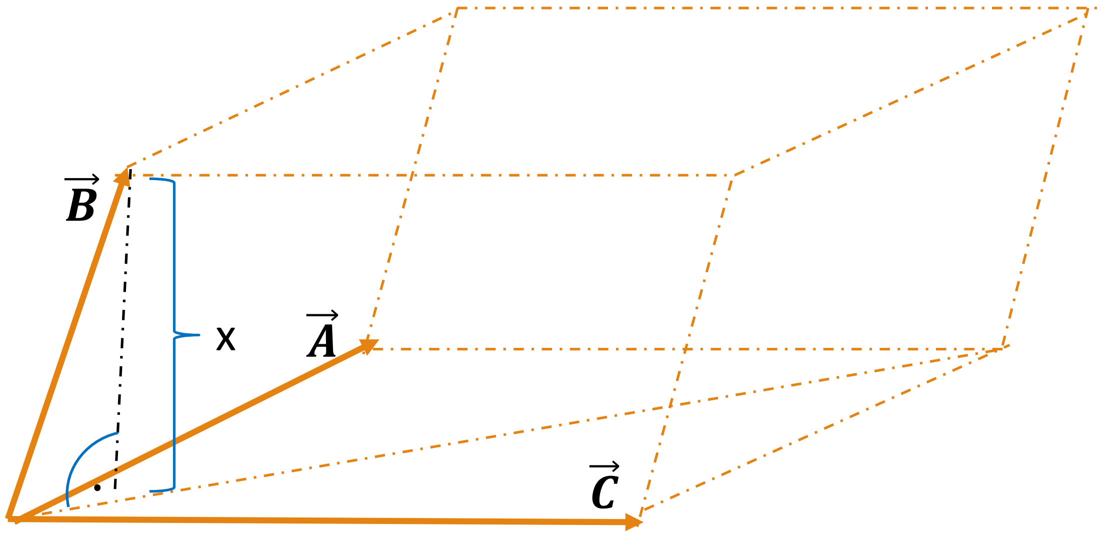
o bokach zadanych przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ oraz kątach $\varphi = \sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})$ i $\theta = \pi - \varphi$:



Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego: **objętość równoległościanu**

$$\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B}) = \vec{A}\cdot(\vec{B}\times\vec{C}) = \vec{B}\cdot(\vec{C}\times\vec{A})$$

$$\left|\vec{C}\cdot(\vec{A}\times\vec{B})\right| = C_1A_2B_3 + C_2A_3B_1 + C_3A_1B_2 - C_3A_2B_1 - C_1A_3B_2 - C_2A_1B_3 \equiv \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$



$$\boldsymbol{V} = \left|(\vec{C}\times\vec{A})\cdot\vec{B}\right|$$

Przykłady

Zad. 1.

Wyprowadź równanie na iloczyn skalarny $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{A_x B_x} + \boldsymbol{A_y B_y} + \boldsymbol{A_z B_z}$ dwóch wektorów $\vec{A}$, $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$, wyrażonych za pomocą wektorów jednostkowych.

Zad. 2.

Wyprowadź równanie na iloczyn wektorowy $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{\imath}}\left(\boldsymbol{A_y B_z} - \boldsymbol{A_z B_y}\right) + \vec{\boldsymbol{\jmath}}(\boldsymbol{A_z B_x} - \boldsymbol{A_x B_z}) + \vec{\boldsymbol{k}}\left(\boldsymbol{A_x B_y} - \boldsymbol{A_y B_x}\right)$ dwóch wektorów $\vec{A}$, $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$, wyrażonych za pomocą wektorów jednostkowych.

Zad.3.

Znaleźć składową i wektor składowy wektora $\vec{A} = -2\vec{\imath} + \vec{k}$ wzdłuż wektora $\vec{B} = \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Literatura

1. E. Karaśkiewicz, Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, W-wa 1976 (lub inne wydania).

2. T. Trajdos, Matematyka cz. 3, WN-T, W-wa 1999 (lub inne wydania).

3. W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny , Fizyka dla szkół wyższych Tom I, ISBN-13: 978-83-948838-1-2

https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1

4. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki 1, PWN, W-wa 2011 (lub inne wydania).