Ruch krzywoliniowy. Siły bezwładności.

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Pochodna wektora jednostkowego (wersora)

Wersor to wektor jednostkowy:

$$|\vec{e}| = 1 \qquad \vec{e} \cdot \vec{e} = 1$$

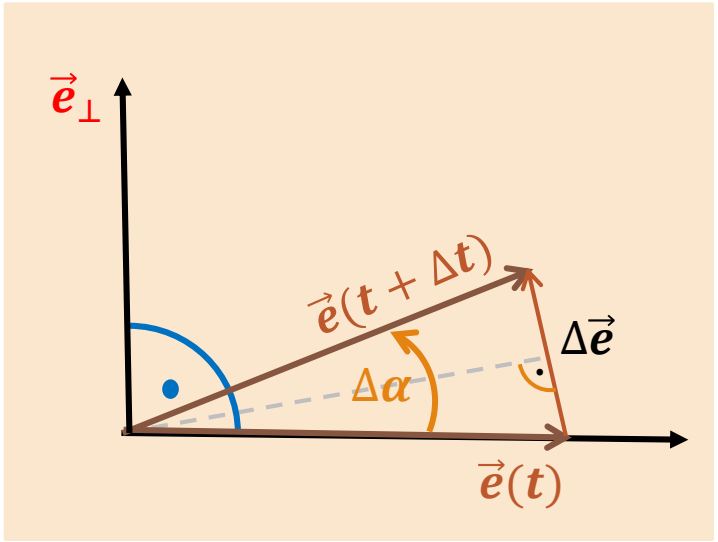
$$\frac{d}{dt}(\vec{e} \cdot \vec{e}) = 0 = 2\left(\frac{d\vec{e}}{dt} \cdot \vec{e}\right)$$

Dla $\frac{d\vec{e}}{dt} \neq 0$ *i* $\vec{e} \neq 0$ zachodzi:

$$\frac{d\vec{e}}{dt} \perp \vec{e}$$

$$d\vec{e} \perp \vec{e}$$

Przyrost wersora:



$$|\vec{e} + \Delta\vec{e}| = |\vec{e}(t + \Delta t)| = 1$$

$$sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \frac{|\Delta\vec{e}|}{2} / |\vec{e}|$$

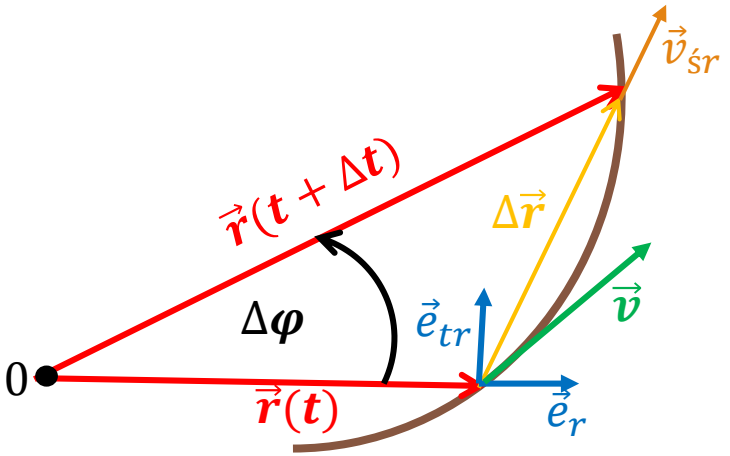
$$|d\vec{e}| = \lim_{\Delta\alpha \to 0} |\vec{e}| \frac{sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\frac{\Delta\alpha}{2}} \Delta\alpha$$

$$|\boldsymbol{d\vec{e}}| = |\vec{e}|\boldsymbol{d\alpha} = \boldsymbol{d\alpha}$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{e}_\perp$$

Ruch krzywoliniowy - prędkość

- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r}\vec{e}_r + \underbrace{r\frac{d\vec{e}_r}{dt}}_{v_{tr}\vec{e}_{tr}} = v\vec{e}_t$



- $v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_{tr}}^2}$

Składowa radialna i transwersalna

Pochodna wektora jednostkowego względem czasu równa jest prędkości końca tego wersora.

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} \perp \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_{tr}$$

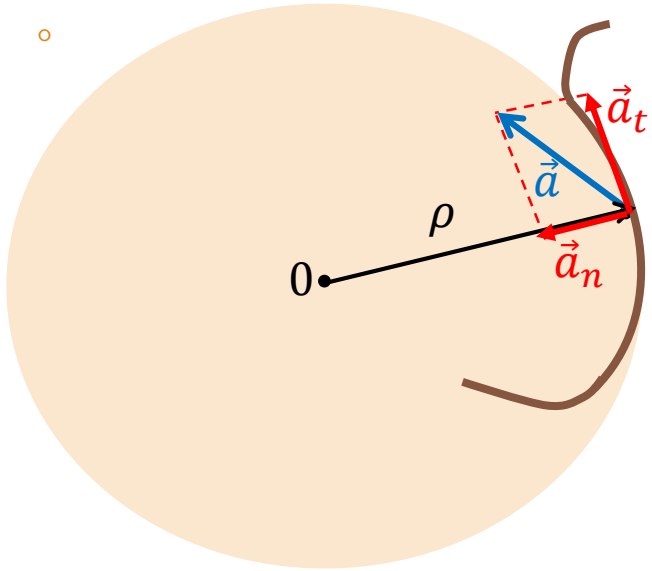
$$v_r = \frac{dr}{dt} \equiv \dot{r} \qquad v_{tr} = r\frac{d\varphi}{dt} \equiv r\dot{\varphi}$$

Ruch krzywoliniowy - przyspieszenie

- **Składowa styczna i normalna**

- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{e}_t}_{\vec{a}_t = a_t\vec{e}_t} + \underbrace{v\frac{d\vec{e}_t}{dt}}_{\vec{a}_n = a_n\vec{e}_n}$

$\frac{d\vec{e}_t}{dt} \perp \vec{e}_t$

- 

$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{e}_t}{ds}}_{\frac{1}{\rho}\vec{e}_n} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = \frac{v}{\rho}\vec{e}_n$

$a_t = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v}$

$a_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$

Składowa radialna i transwersalna

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_{tr}) =$

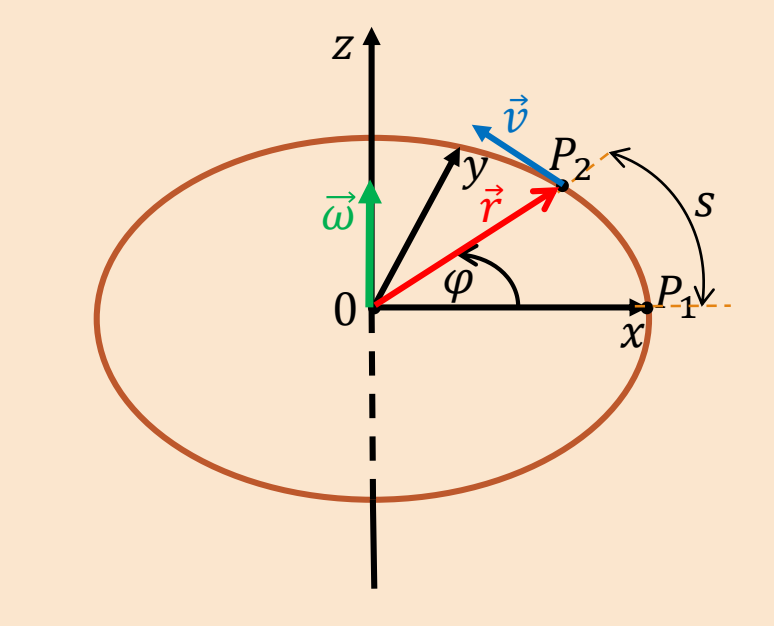
$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}}_{=\dot{\varphi}\vec{e}_{tr}} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_{tr} + r\ddot{\varphi}\vec{e}_{tr} + r\dot{\varphi}\underbrace{\frac{d\vec{e}_{tr}}{dt}}_{-\dot{\varphi}\vec{e}_r} =$

$= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r}_{\vec{a}_r = a_r\vec{e}_r} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_{tr}}_{\vec{a}_{tr} = a_{tr}\vec{e}_{tr}}$

$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \qquad a_{tr} = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$

$$a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{{a_r}^2 + {a_{tr}}^2}$$

Ruch punktu po okręgu

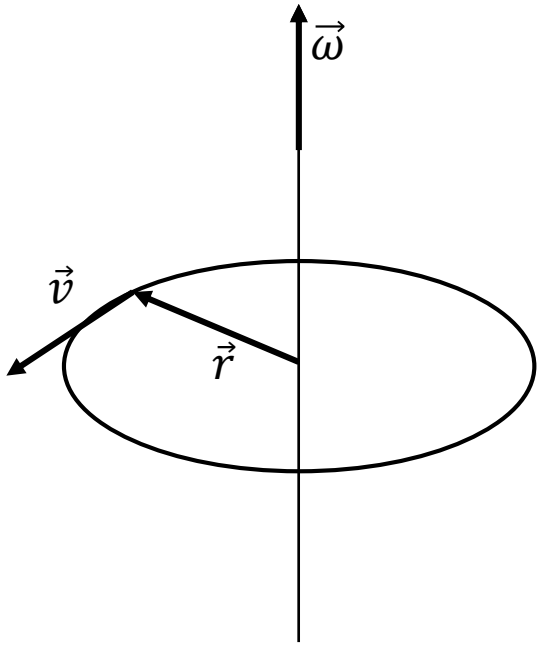


$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$s = r\varphi$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\omega}$$



v – prędkość liniowa mierzona w $\left[\frac{m}{s}\right]$

ω – prędkość kątowa mierzona w $\left[\frac{rad}{s}\right]$

Ruch przy stałej prędkości kątowej nazywa się **ruchem jednostajnym po okręgu**.

Ruch punktu po okręgu – siła dośrodkowa

Okres T w ruchu jednostajnym po okręgu to czas przebycia drogi kątowej równej 2π:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \Longrightarrow \quad T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Częstość ν w ruchu jednostajnym po okręgu to liczba obiegów wykonanych w ciągu sekundy czyli odwrotność okresu T:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad \Longrightarrow \quad \omega = 2\pi\nu$$

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r=0}\vec{e}_r + \underbrace{r\frac{d\varphi}{dt}}_{v_{tr}\equiv v_t}\vec{e}_{tr} = r\dot{\varphi}\vec{e}_{tr}$$

$$\vec{e}_{tr} \equiv \vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(r\dot{\varphi}\vec{e}_t) = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n = \underbrace{\dot{\varphi}\dot{r}}_{=0}\vec{e}_t + \underbrace{r\ddot{\varphi}}_{=r\varepsilon}\vec{e}_t + \underbrace{r\dot{\varphi}^2}_{\frac{v^2}{r}}\vec{e}_n$$

$\vec{\varepsilon} = \varepsilon\frac{\vec{\omega}}{\omega}$ - przyspieszenie kątowe

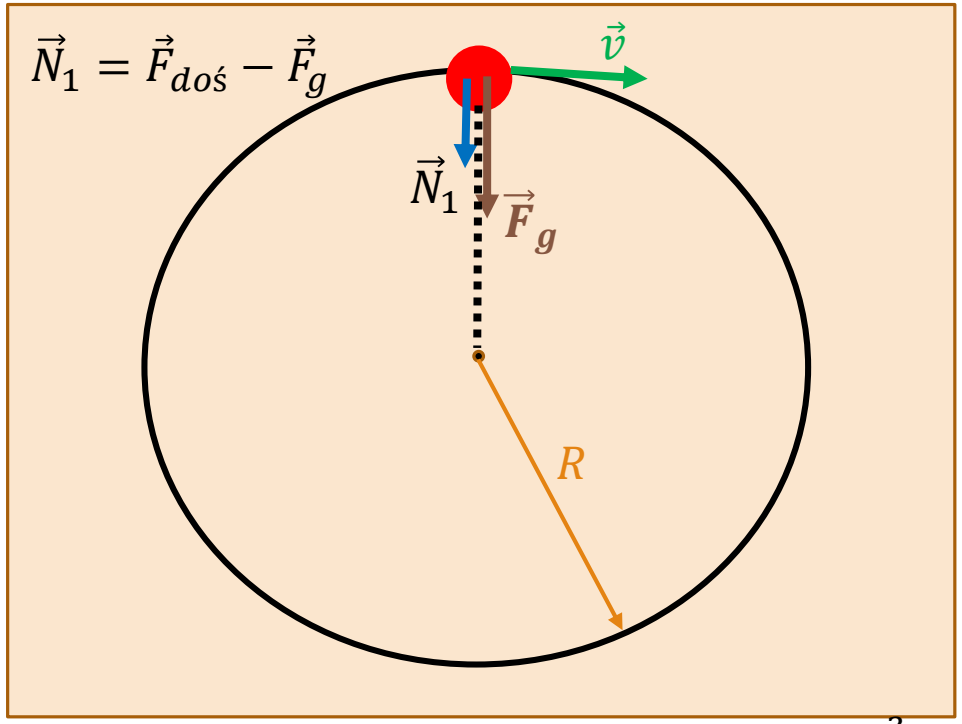
$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{e}_t}{ds}}_{\frac{1}{r}\vec{e}_n} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{r\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\vec{e}_n$$

<u>Siła dośrodkowa działająca na punkt materialny o masie m:</u>

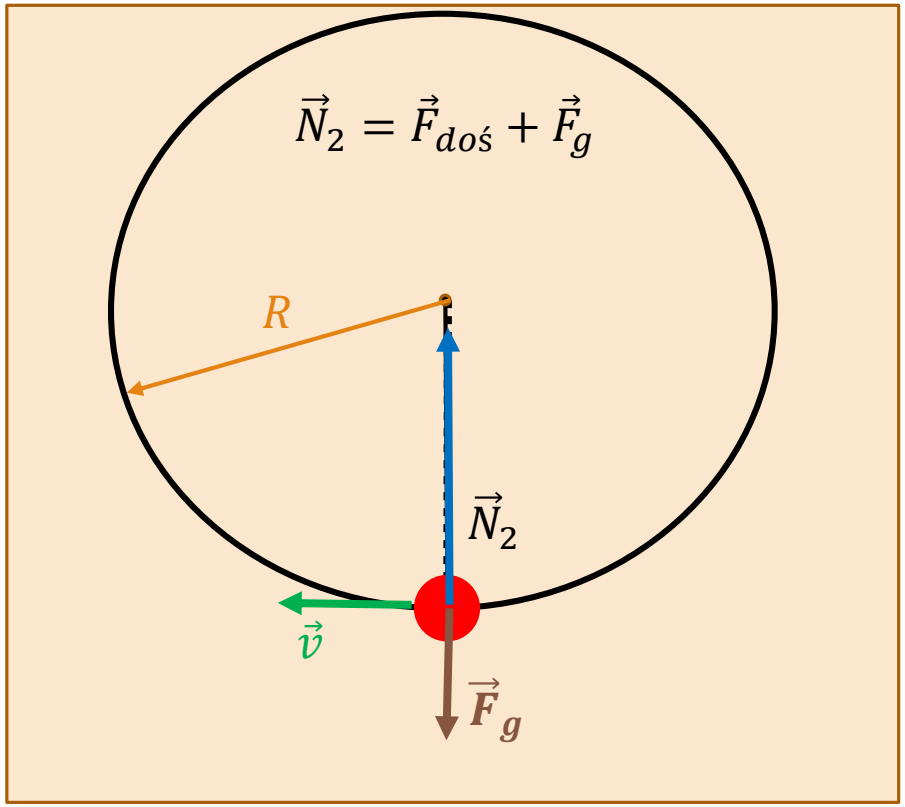
$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = m\underbrace{r\dot{\varphi}^2}_{\frac{v^2}{r}}\vec{e}_n$$

Siła dośrodkowa odpowiada za zmianę kierunku prędkości!

Siła dośrodkowa. Piłeczka na sznurku poruszająca się po okręgu w polu grawitacyjnym.



$$\vec{F}_{doś} = \vec{N}_1 + \vec{F}_g \Rightarrow |\vec{N}_1| + mg = \frac{mv^2}{R}$$



$$\vec{F}_{doś} = \vec{N}_2 - \vec{F}_g \Rightarrow |\vec{N}_2| - mg = \frac{mv^2}{R}$$

Ruch punktu po okręgu c. d.

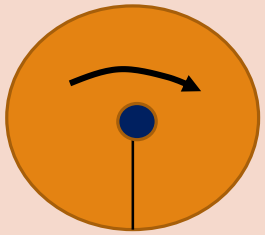
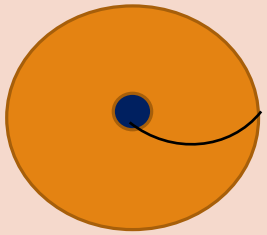
Ruch jednostajny	$a_t = \varepsilon r = 0$ $\quad a_n = \frac{v^2}{r} = const.$ $\omega = const.$ $\quad \omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T}$ $\alpha(t) = \omega t$
Ruch jednostajnie zmienny	$a_t = r\varepsilon = const.$ $\quad a_n = \frac{\boldsymbol{v^2}}{\boldsymbol{r}} = \omega^2 r = \varepsilon^2 t^2 r$ $\omega(t) = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\alpha(t) = \omega_0 t \pm \varepsilon \frac{t^2}{2}$
Ruch niejednostajny	$a_t = r\varepsilon$ $\quad a_n = \frac{v^2}{r}$ $\omega(t) = \int \varepsilon \, dt$ $\quad \alpha(t) = \int \omega \, dt$

Siły bezwładności

Siły bezwładności to siły pozorne.

Siła bezwładności może zniknąć przy zmianie układu odniesienia, jaki zostanie wybrany do obserwacji danego zjawiska, np. siła Coriolisa:

$$\vec{F} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$$

Dla obserwatora stojącego na ziemi kulka porusza się po linii prostej	Dla obserwatora stojącego na tarczy
	

<u>Siłę bezwładności odczuwamy na przykład:</u>

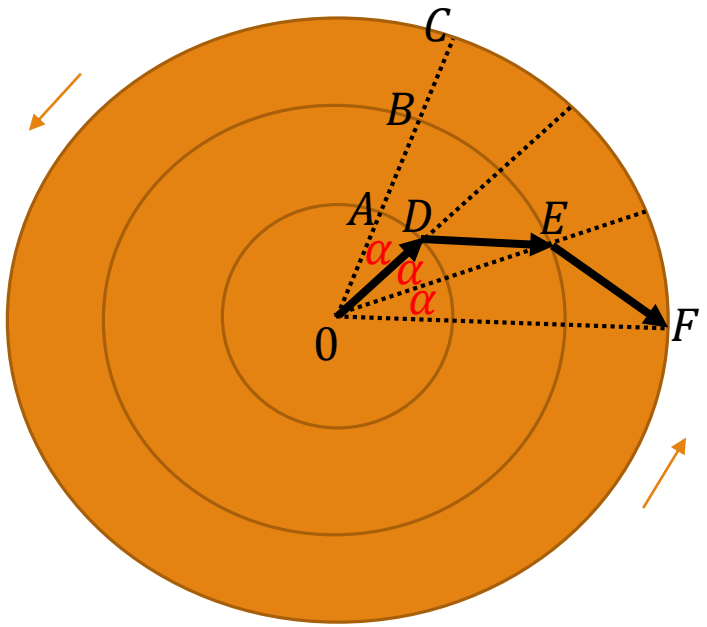
- w windzie,
- w samochodzie, tramwaju, autobusie,
- na karuzeli

Siły bezwładności nie obserwujemy, jeśli oglądamy jazdę przyspieszającego samochodu z przystanku autobusowego, czy przejażdżkę na karuzeli z ławki na placu zabaw.

Siła Coriolisa

Tarcza obraca się ruchem JEDNOSTAJNYM

(ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$)



$\alpha = \omega\Delta t$

Układ nieruchomy (związanym z Ziemią)

$0ABC$ – tor kulki

$0A = AB = BC = \Delta s = v\Delta t$

Układ ruchomy (związanym z tarczą)

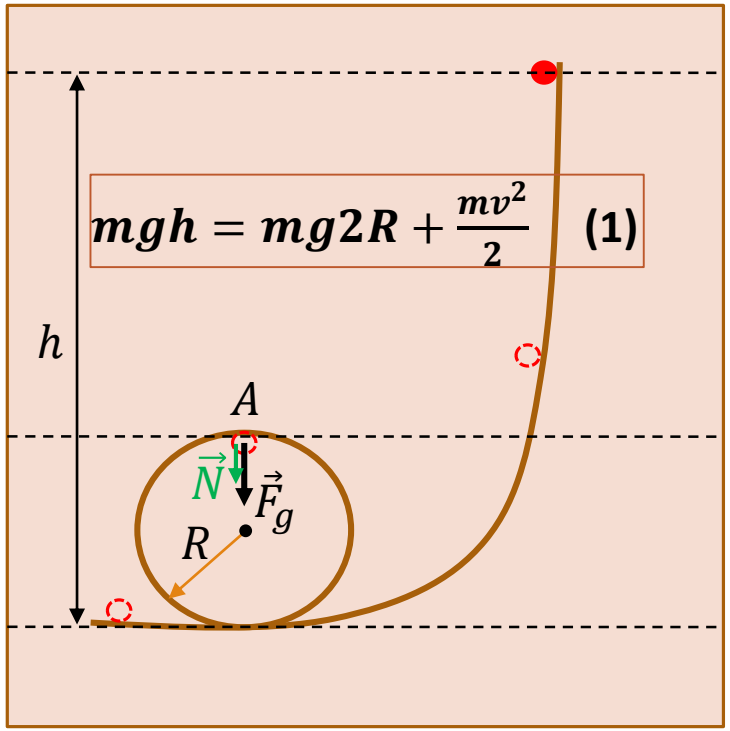
$0DEF$ – tor kulki

$$AD = 0A \cdot \alpha = \Delta s\omega\Delta t = v\Delta t\omega\Delta t = \frac{1}{2}\underbrace{a_c}_{2v\omega}(\Delta t)^2$$

$$\vec{F}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}$$

Siła odśrodkowa

Kulka w rynience lub kolejka górska w Wesołym Miasteczku:



Aby kulka w punkcie A nie oderwała się od rynienki musi być spełniony warunek:

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}$$

$$\frac{mv^2}{R} \geq mg \quad (2)$$

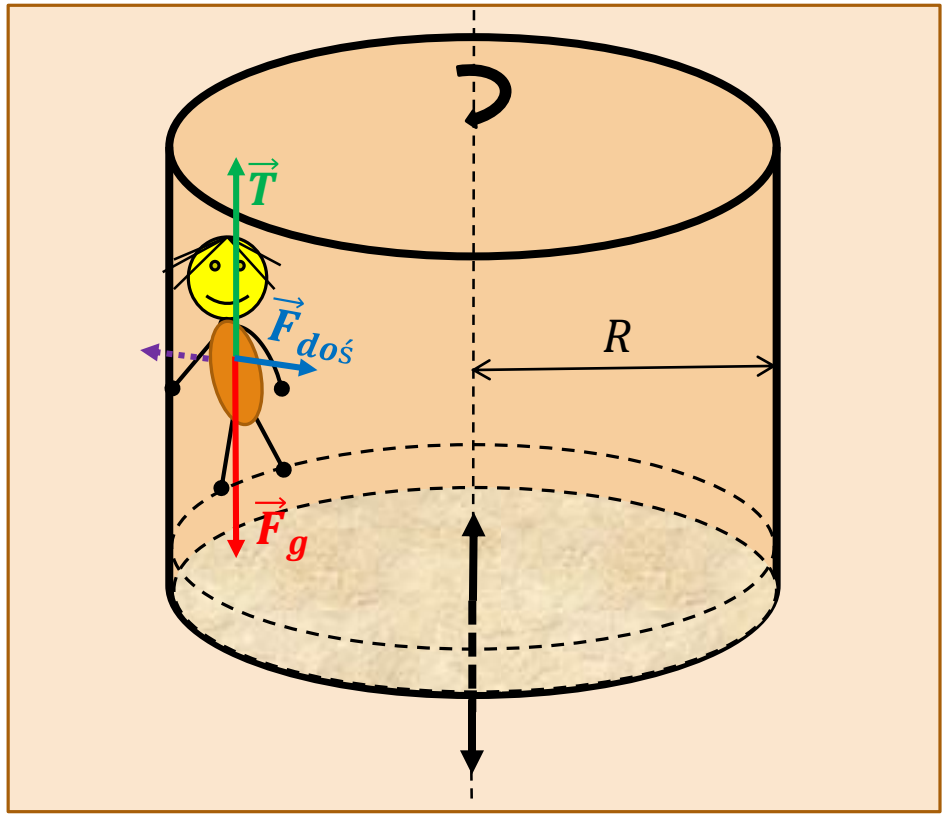
Siła odśrodkowa jako siła bezwładności pojawia się tylko w układach nieinercjalnych.

Siła odśrodkowa wynika z ruchu układu odniesienia, nie jest więc powodowana żadnym oddziaływaniem.

Z (1) i (2): $h \geq 2,5R$

Siła dośrodkowa – rotor.

Rotor obracający się z prędkością kątową $\vec{\omega}$:



$$T \sim N \qquad T \leq \mu N$$

$$\vec{F}_{doś} \equiv \vec{N}$$

Jeżeli spełniony jest warunek:

$$\boldsymbol{mg \leq \mu N}$$

$$\boldsymbol{mg \leq \frac{mv^2}{R}\mu}$$

wówczas człowiek będzie unosił się nad podłogą

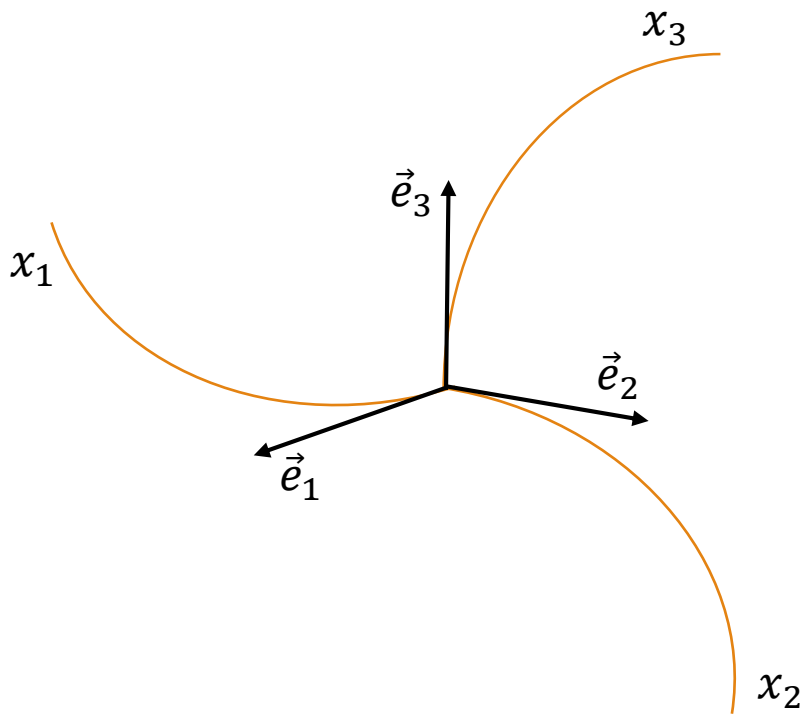
$$\boldsymbol{v_{gr} \geq \sqrt{\frac{gR}{\mu}}}$$

Prostokątne układy krzywoliniowe

$\mathbb{R}^3$

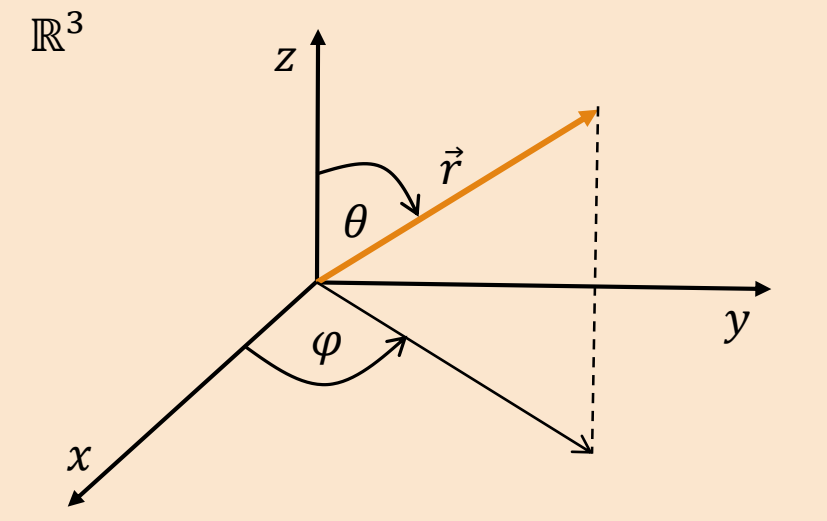
$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - baza ortonormalna

x_1, x_2, x_3 - współrzędne punktu



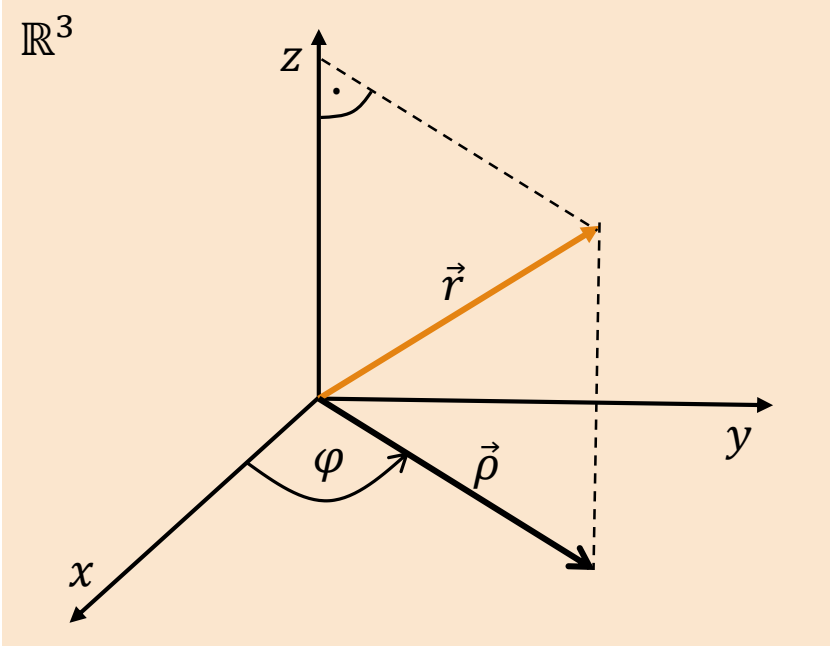
Przykłady prostokątnych układów krzywoliniowych

Układ współrzędnych sferycznych (r, θ, φ)



$0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$

Układ współrzędnych walcowych (ρ, φ, z)



$0 \leq \varphi < 2\pi$

Przykłady

Zad. 1.

Mrówka porusza się ze stałą prędkością v_0 wzdłuż promienia kolistej tarczy wirującej wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową ω. Wyznaczyć w nieruchomym układzie odniesienia: a) zależność od czasu wartości wektora prędkości oraz jego składowych radialnej i transwersalnej, b) zależność od czasu wartości wektora przyspieszenia, jak również jego składowych: radialnej, transwersalnej oraz normalnej i stycznej.

Zad. 2.

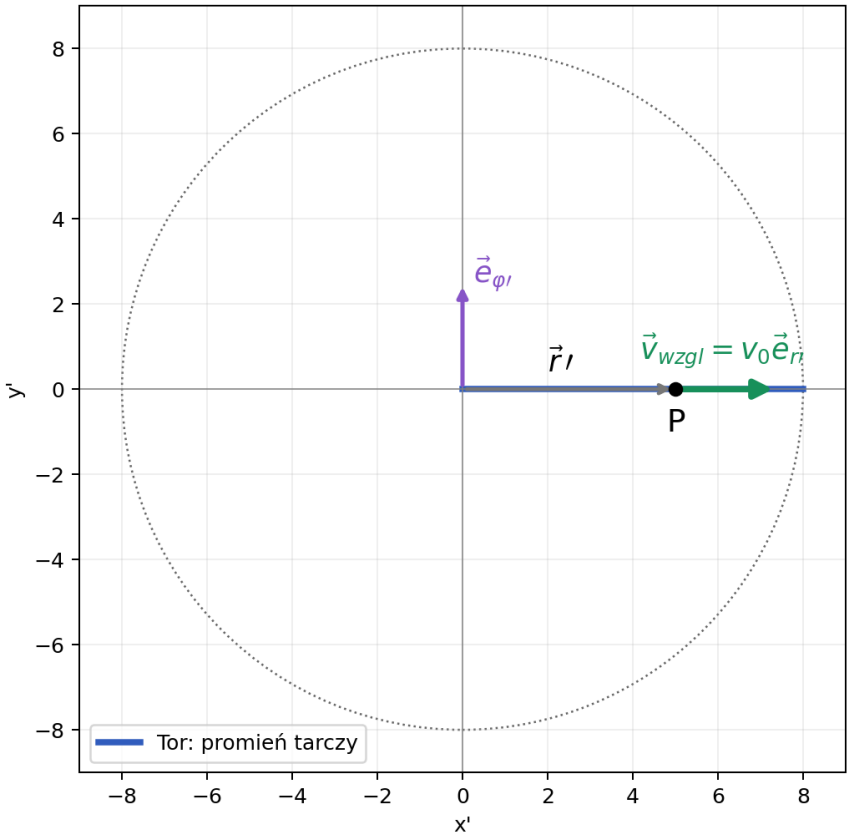
Piłka została kopnięta poziomo ze wzniesienia z prędkością v_0. Wyznaczyć promień krzywizny toru piłki po upływie czasu t od momentu jej kopnięcia. Opór powietrza pominąć.

Zad. 3.

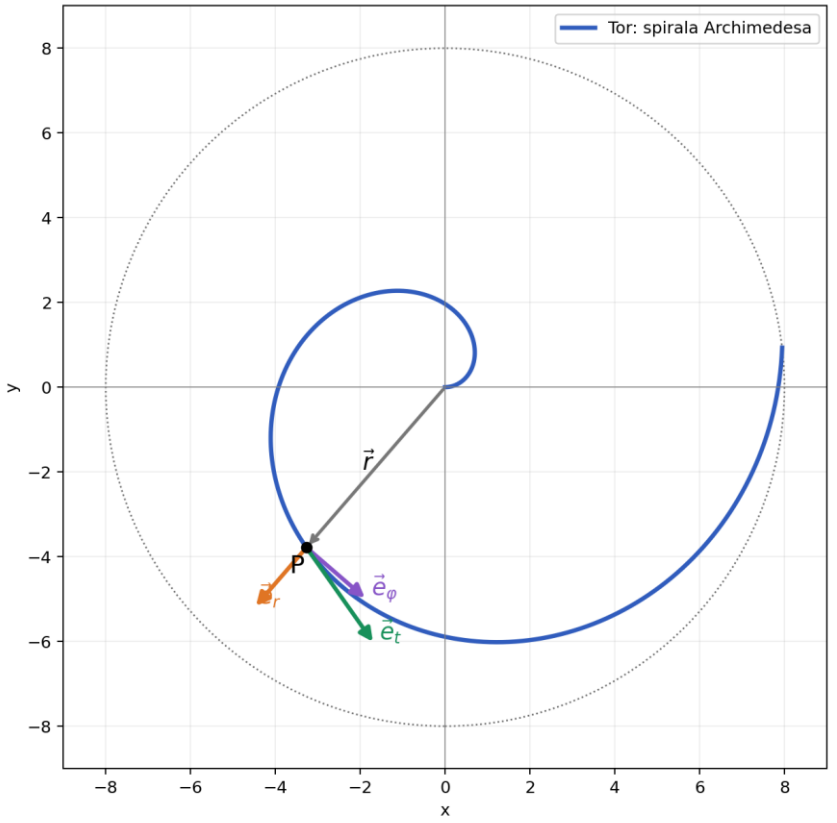
Samochód o masie m porusza się po torze płaskim o współczynniku tarcia statycznego μ wzdłuż łuku stanowiącego wycinek okręgu o promieniu r. Obliczyć maksymalną prędkość v_{max} samochodu, przy której samochód jeszcze nie wpadnie w poślizg. Czy prędkość ta ulegnie zmianie w przypadku ruchu samochodu na pochylonym zakręcie?

Przykład 1

Układ związany z tarczą: tor prostoliniowy



Układ związany z Ziemią: tor spiralny



Literatura

1. I. W. Sawieliew, KURS FIZYKI T. 1 „Mechanika”, „Fizyka cząsteczkowa”, PWN, W-wa 1987 (lub nowsze wydania).

2. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki T. 1, PWN, W-wa 1984 (lub inne wydania).

3. A. Hennel, W. Krzyżanowski, W. Szuszkiewicz, K. Wódkiewicz, Zadania i problemy z fizyki T. 1, PWN, W-wa 1974 (lub inne wydania).

4. B. M. Jaworski, A. A. Piński, Elementy fizyki Tom 1 i 2, PWN, W-wa 1976 (lub nowsze wydania).

5. E. Karaśkiewicz, Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, W-wa 1976 (lub inne wydania).