Ruch krzywoliniowy. Siły bezwładności.

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Pochodna wektora jednostkowego (wersora)

<u>Wersor to wektor jednostkowy:</u>

$$|\vec{e}| = 1 \qquad \vec{e}\cdot\vec{e} = 1$$

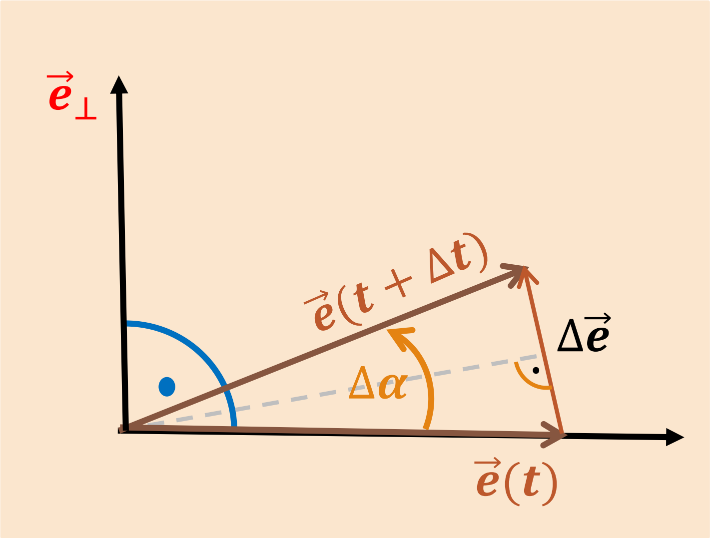
$$\frac{d}{dt}(\vec{e}\cdot\vec{e}) = 0 = 2\left(\frac{d\vec{e}}{dt}\cdot\vec{e}\right)$$

Dla $\frac{d\vec{e}}{dt} \neq 0 \; i \; \vec{e} \neq 0$ zachodzi:

$$\frac{d\vec{e}}{dt} \perp \vec{e}$$

$$d\vec{e} \perp \vec{e}$$

<u>Przyrost wersora:</u>



$$|\vec{e}+\Delta\vec{e}| = |\vec{e}(t+\Delta t)\,| = 1$$

$$sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right) = \frac{|\Delta\vec{e}|}{2}/|\vec{e}|$$

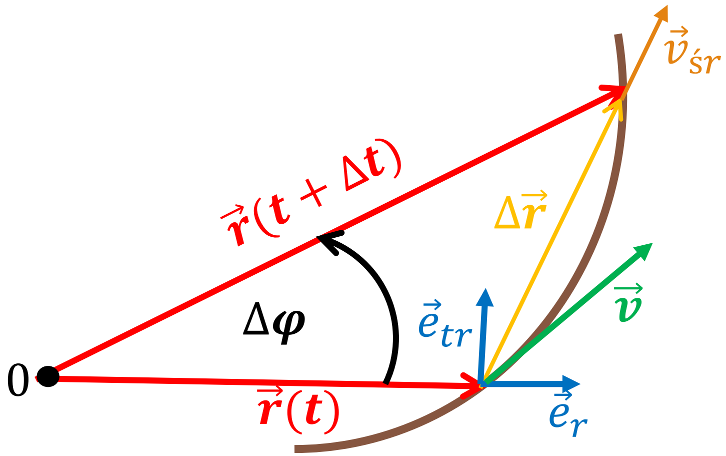
$$|d\vec{e}| = \lim_{\Delta\alpha\to 0}|\vec{e}|\frac{sin\left(\frac{\Delta\alpha}{2}\right)}{\frac{\Delta\alpha}{2}}\Delta\alpha$$

$$|d\vec{\boldsymbol{e}}| = |\vec{\boldsymbol{e}}|\boldsymbol{d\alpha} = \boldsymbol{d\alpha}$$

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \frac{d\alpha}{dt}\vec{\boldsymbol{e}}_\perp$$

Ruch krzywoliniowy - prędkość

- $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r}\vec{e}_r + \underbrace{r\frac{d\vec{e}_r}{dt}}_{v_{tr}\vec{e}_{tr}} = v\vec{e}_t$



- $v = \sqrt{{v_r}^2 + {v_{tr}}^2}$

Składowa radialna i transwersalna

Pochodna wektora jednostkowego względem czasu równa jest prędkości końca tego wersora.

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} \perp \vec{e}_r$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_{tr}$$

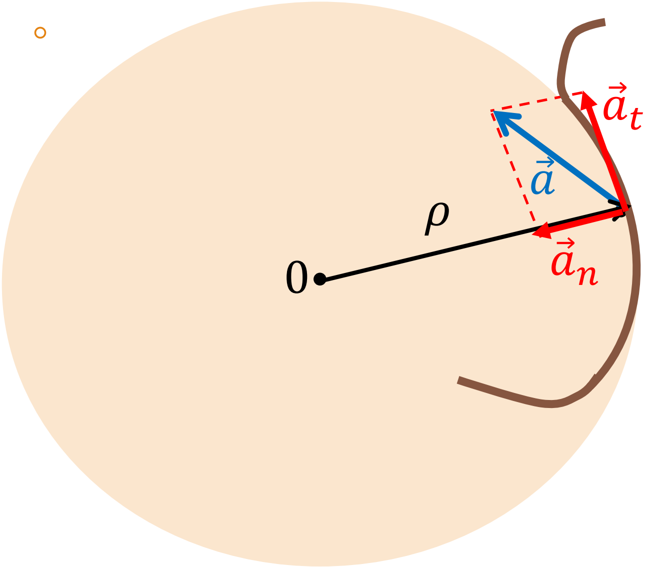
$$v_r = \frac{dr}{dt} \equiv \dot{r} \qquad v_{tr} = r\frac{d\varphi}{dt} \equiv r\dot{\varphi}$$

Ruch krzywoliniowy - przyspieszenie

- **Składowa styczna i normalna**

- $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{e}_t) = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{e}_t}_{\vec{a}_t = a_t\vec{e}_t} + \underbrace{v\frac{d\vec{e}_t}{dt}}_{\vec{a}_n = a_n\vec{e}_n}$

$\frac{d\vec{e}_t}{dt} \perp \vec{e}_t$

- 

$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \underbrace{\frac{d\vec{e}_t}{ds}}_{\frac{1}{\rho}\vec{e}_n} \cdot \underbrace{\frac{ds}{dt}}_{v} = \frac{v}{\rho}\vec{e}_n$$

$$a_t = \frac{dv}{dt} \equiv \dot{v}$$

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

Składowa radialna i transwersalna

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_{tr}) =$$

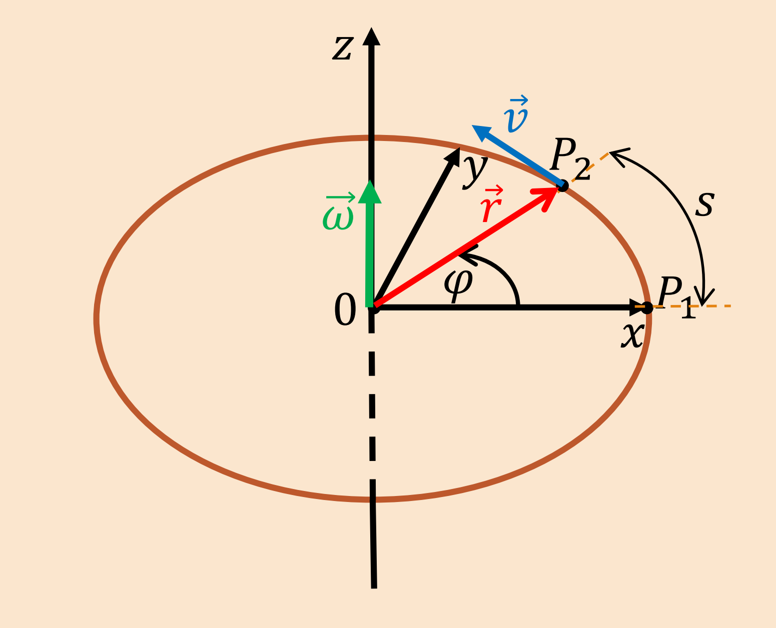
$$= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\underbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}}_{=\dot{\varphi}\vec{e}_{tr}} + \dot{r}\dot{\varphi}\vec{e}_{tr} + r\ddot{\varphi}\vec{e}_{tr} + r\dot{\varphi}\underbrace{\frac{d\vec{e}_{tr}}{dt}}_{-\dot{\varphi}\vec{e}_r} =$$

$$= \underbrace{(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r}_{\vec{a}_r = a_r\vec{e}_r} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi})\vec{e}_{tr}}_{\vec{a}_{tr} = a_{tr}\vec{e}_{tr}}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2 \qquad a_{tr} = 2\dot{r}\dot{\varphi} + r\ddot{\varphi}$$

$$\boxed{a = \sqrt{{a_t}^2 + {a_n}^2} = \sqrt{{a_r}^2 + {a_{tr}}^2}}$$

Ruch punktu po okręgu



$$\vec{\omega} = \omega\vec{k}$$

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$s = r\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$v = \frac{ds}{dt} = r\underbrace{\frac{d\varphi}{dt}}_{\omega}$$

v – prędkość liniowa mierzona w $\left[\frac{m}{s}\right]$

ω – prędkość kątowa mierzona w $\left[\frac{rad}{s}\right]$

Ruch przy stałej prędkości kątowej nazywa się **ruchem jednostajnym po okręgu**.

Ruch punktu po okręgu – siła dośrodkowa

Okres $\boldsymbol{T}$ w ruchu jednostajnym po okręgu to czas przebycia drogi kątowej równej 2π:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \Longrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Częstość $\boldsymbol{\nu}$ w ruchu jednostajnym po okręgu to liczba obiegów wykonanych w ciągu sekundy czyli odwrotność okresu T:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \Longrightarrow \omega = 2\pi\nu$$

$$\vec{v} = \underbrace{\frac{dr}{dt}}_{v_r=0}\vec{e}_r + \underbrace{r\frac{d\varphi}{dt}}_{v_{tr}\equiv v_t}\vec{e}_{tr} = r\dot{\varphi}\vec{e}_{tr}$$

$$\vec{e}_{tr} \equiv \vec{e}_t$$

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}(r\dot{\varphi}\vec{e}_t) = a_t\vec{e}_t + a_n\vec{e}_n = \underbrace{\dot{\varphi}\dot{r}}_{=0}\,\vec{e}_t + \underbrace{r\ddot{\varphi}}_{=r\varepsilon}\,\vec{e}_t + \underbrace{r\dot{\varphi}^2}_{\frac{v^2}{r}}\,\vec{e}_n$$

$\vec{\varepsilon} = \varepsilon\frac{\vec{\omega}}{\omega}$ - przyspieszenie kątowe

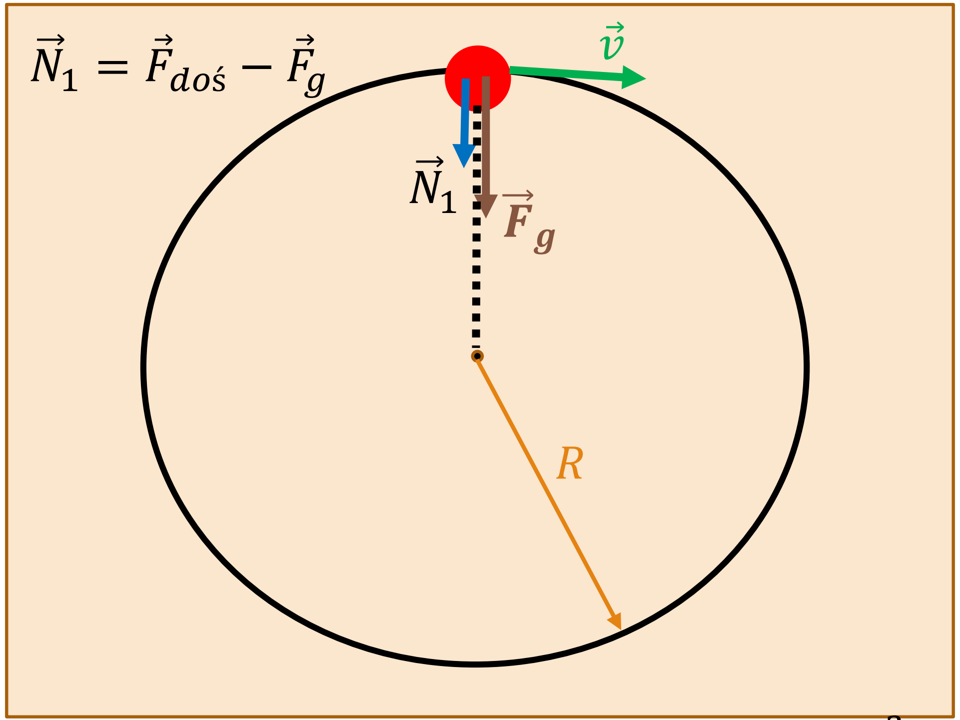
$$\frac{d\vec{e}_t}{dt} = \overbrace{\frac{d\vec{e}_t}{ds}}^{\frac{1}{r}\vec{e}_n} \cdot \overbrace{\frac{ds}{dt}}^{r\dot{\varphi}} = \dot{\varphi}\vec{e}_n$$

<u>**Siła dośrodkowa działająca na punkt materialny o masie $\boldsymbol{m}$:**</u>

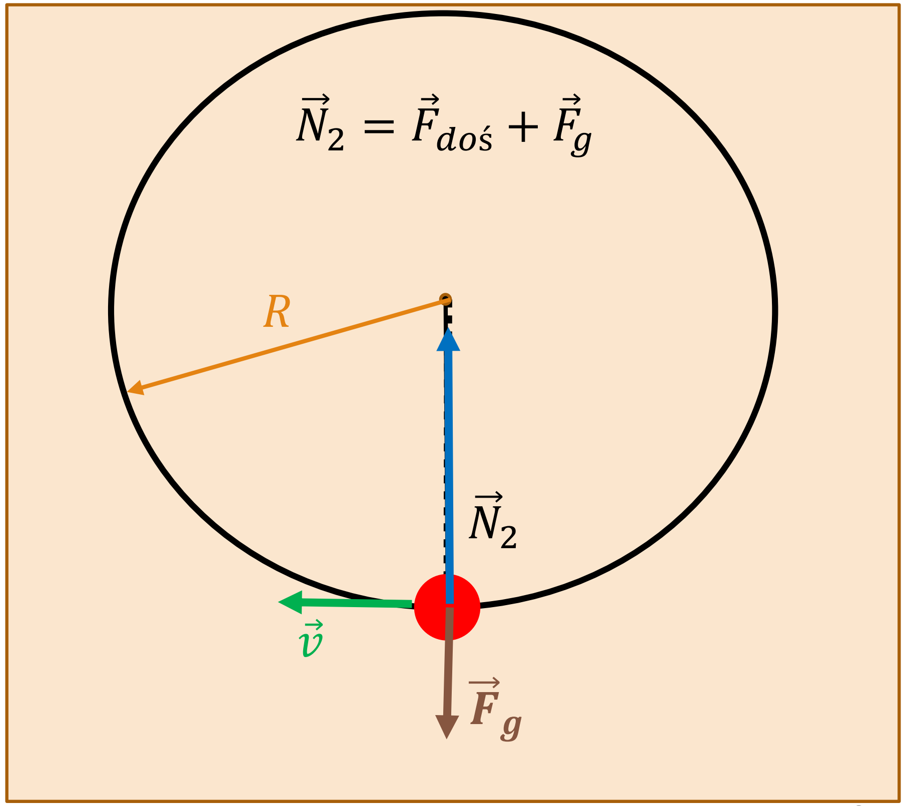
$$\vec{F}_n = m\vec{a}_n = m\underbrace{r\dot{\varphi}^2}_{\frac{v^2}{r}}\,\vec{e}_n$$

Siła dośrodkowa odpowiada za zmianę kierunku prędkości!

Siła dośrodkowa. Piłeczka na sznurku poruszająca się po okręgu w polu grawitacyjnym.



$$\vec{F}_{doś} = \vec{N}_1 + \vec{F}_g \Rightarrow \left|\vec{N}_1\right| + mg = \frac{mv^2}{R}$$



$$\vec{F}_{doś} = \vec{N}_2 - \vec{F}_g \Rightarrow \left|\vec{N}_2\right| - mg = \frac{mv^2}{R}$$

Ruch punktu po okręgu c. d.

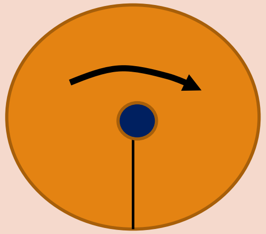
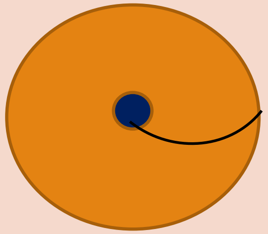
Ruch jednostajny	$a_t = \varepsilon r = 0 \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = const.$ $\omega = const. \qquad \omega = \frac{\alpha}{t} = \frac{2\pi}{T}$ $\alpha(t) = \omega t$
Ruch jednostajnie zmienny	$a_t = r\varepsilon = const. \qquad a_n = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r = \varepsilon^2 t^2 r$ $\omega(t) = \omega_0 \pm \varepsilon t$ $\alpha(t) = \omega_0 t \pm \varepsilon \frac{t^2}{2}$
Ruch niejednostajny	$a_t = r\varepsilon \qquad a_n = \frac{v^2}{r}$ $\omega(t) = \int \varepsilon \, dt \qquad \alpha(t) = \int \omega \, dt$

Siły bezwładności

Siły bezwładności to siły pozorne.

Siła bezwładności może zniknąć przy zmianie układu odniesienia, jaki zostanie wybrany do obserwacji danego zjawiska, np. siła Coriolisa:

$$\vec{F} = -2m(\vec{\omega} \times \vec{v}) = 2m(\vec{v} \times \vec{\omega})$$

Dla obserwatora stojącego na ziemi kulka porusza się po linii prostej	Dla obserwatora stojącego na tarczy
	

<u>Siłę bezwładności odczuwamy na przykład:</u>

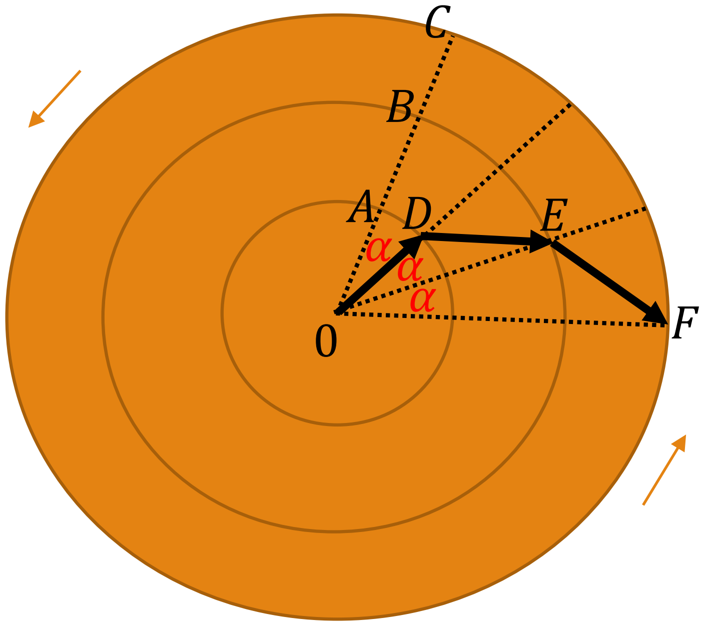
- w windzie,
- w samochodzie, tramwaju, autobusie,
- na karuzeli

Siły bezwładności nie obserwujemy, jeśli oglądamy jazdę przyspieszającego samochodu z przystanku autobusowego, czy przejażdżkę na karuzeli z ławki na placu zabaw.

Siła Coriolisa

Tarcza obraca się ruchem JEDNOSTAJNYM

(ze stałą prędkością kątową $\vec{\omega}$)



$\alpha = \omega \Delta t$

<u>Układ nieruchomy (związanym z Ziemią)</u>

$0ABC$ – tor kulki

$0A = AB = BC = \Delta s = v\Delta t$

<u>Układ ruchomy (związanym z tarczą)</u>

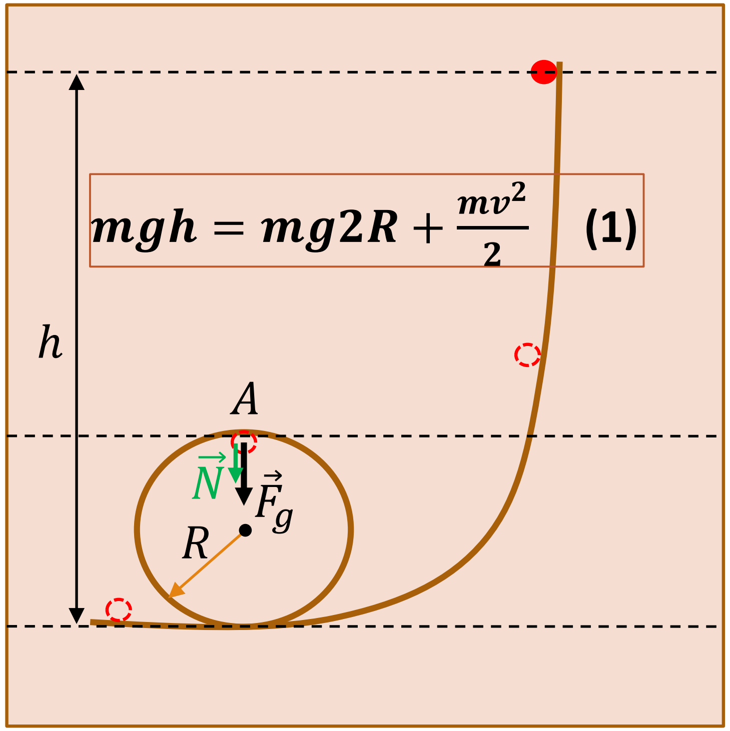
$0DEF$ – tor kulki

$$AD = 0A \cdot \alpha = \Delta s \omega \Delta t = v \Delta t \omega \Delta t = \frac{1}{2} \underbrace{a_c}_{2v\omega} (\Delta t)^2$$

$$\boldsymbol{\vec{F}_c = 2m\vec{v} \times \vec{\omega}}$$

Siła odśrodkowa

Kulka w rynience lub kolejka górska w Wesołym Miasteczku:



Aby kulka w punkcie A nie oderwała się od rynienki musi być spełniony warunek:

$$N + mg = \frac{mv^2}{R}$$

$$\boxed{\frac{mv^2}{R} \geq mg \qquad (2)}$$

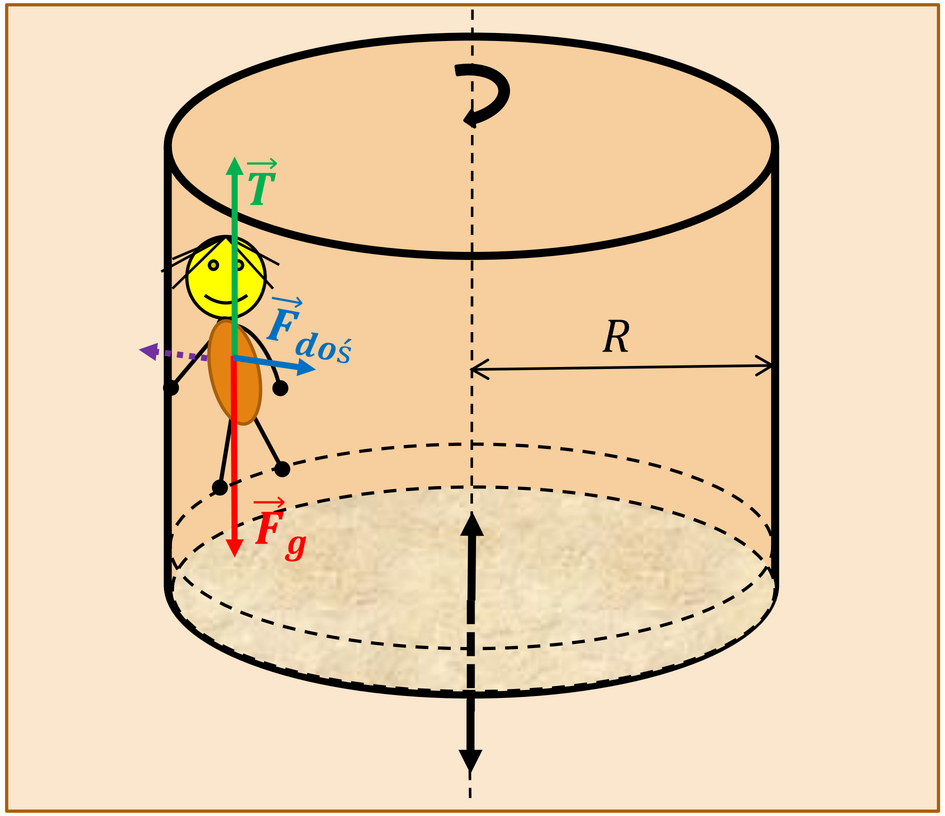
Siła odśrodkowa jako siła bezwładności pojawia się tylko w układach nieinercjalnych.

Siła odśrodkowa wynika z ruchu układu odniesienia, nie jest więc powodowana żadnym oddziaływaniem.

Z (1) i (2): $h \geq 2,5R$

Siła dośrodkowa – rotor.

Rotor obracający się z prędkością kątową $\vec{\omega}$:



$T \sim N \qquad T \leq \mu N$

$$\vec{F}_{doś} \equiv \vec{N}$$

Jeżeli spełniony jest warunek:

$$\boldsymbol{mg \leq \mu N}$$

$$\Downarrow$$

$$\boldsymbol{mg \leq \frac{mv^2}{R}\mu}$$

wówczas człowiek będzie unosił się nad podłogą

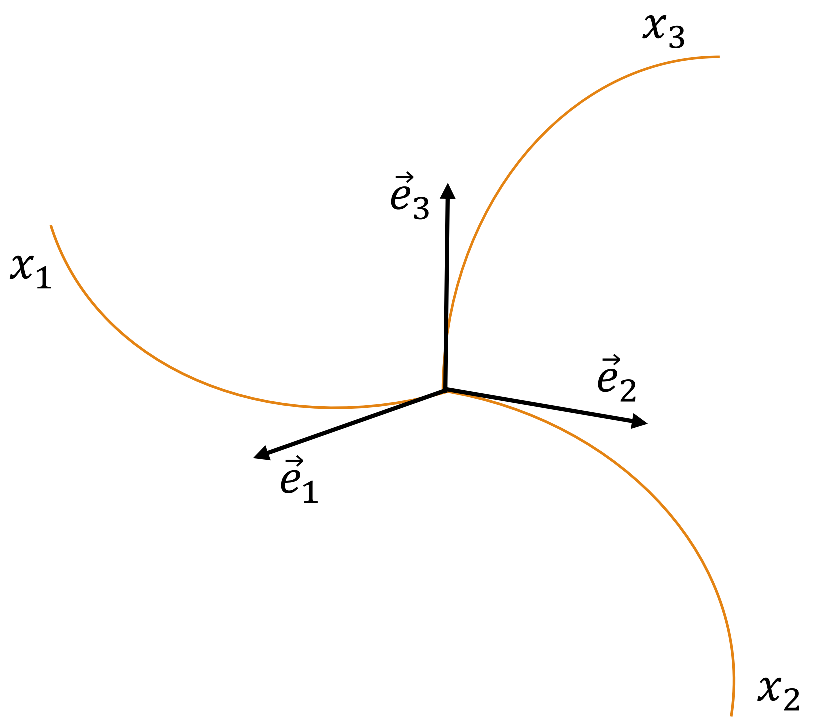
$$\boldsymbol{v_{gr} \geq \sqrt{\frac{gR}{\mu}}}$$

Prostokątne układy krzywoliniowe

$\mathbb{R}^3$

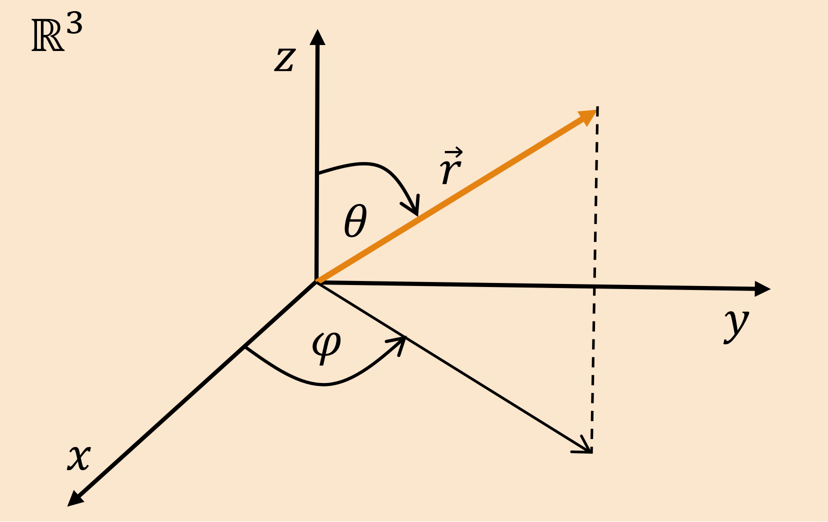
$\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ - baza ortonormalna

x_1, x_2, x_3 - współrzędne punktu



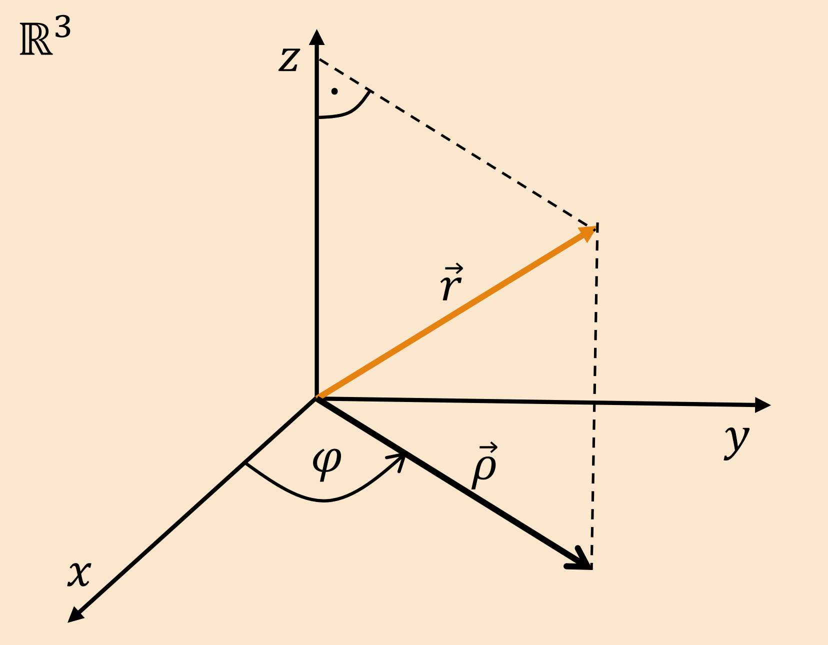
Przykłady prostokątnych układów krzywoliniowych

Układ współrzędnych sferycznych $(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\varphi})$



$0 \leq \theta \leq \pi \qquad 0 \leq \varphi < 2\pi$

Układ współrzędnych walcowych $(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{z})$



$0 \leq \varphi < 2\pi$

Przykłady

Zad. 1.

Mrówka porusza się ze stałą prędkością v_0 wzdłuż promienia kolistej tarczy wirującej wokół swojej osi ze stałą prędkością kątową ω. Wyznaczyć w nieruchomym układzie odniesienia: a) zależność od czasu wartości wektora prędkości oraz jego składowych radialnej i transwersalnej, b) zależność od czasu wartości wektora przyspieszenia, jak również jego składowych: radialnej, transwersalnej oraz normalnej i stycznej.

Zad. 2.

Piłka została kopnięta poziomo ze wzniesienia z prędkością v_0. Wyznaczyć promień krzywizny toru piłki po upływie czasu t od momentu jej kopnięcia. Opór powietrza pominąć.

Zad. 3.

Samochód o masie m porusza się po torze płaskim o współczynniku tarcia statycznego μ wzdłuż łuku stanowiącego wycinek okręgu o promieniu r. Obliczyć maksymalną prędkość v_{max} samochodu, przy której samochód jeszcze nie wpadnie w poślizg. Czy prędkość ta ulegnie zmianie w przypadku ruchu samochodu na pochylonym zakręcie?

Literatura

1. I. W. Sawieliew, KURS FIZYKI T. 1 „Mechanika”, „Fizyka cząsteczkowa”, PWN, W-wa 1987 (lub nowsze wydania).

2. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki T. 1, PWN, W-wa 1984 (lub inne wydania).

3. A. Hennel, W. Krzyżanowski, W. Szuszkiewicz, K. Wódkiewicz, Zadania i problemy z fizyki T. 1, PWN, W-wa 1974 (lub inne wydania).

4. B. M. Jaworski, A. A. Piński, Elementy fizyki Tom 1 i 2, PWN, W-wa 1976 (lub nowsze wydania).

5. E. Karaśkiewicz, Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, W-wa 1976 (lub inne wydania).