Wektory – przykłady zastosowania w fizyce

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Podstawowe modele matematyczne

1. Skalary (np. czas, droga, długość, objętość, temperatura, masa, energia)

2. Wektory (np. siła, prędkość, przyspieszenie)

„Jedź 5 km” — czy wiesz, gdzie się znajdziesz?

Wektor = „ile?” + „w którą stronę?”

3. Tensory (np. tensor momentu bezwładności, tensor naprężeń)

4. Funkcje (np. zależność wychylenia od czasu w ruchu drgającym)

Wektory a przestrzeń liniowa

Przestrzeń liniowa $(V, +, K, \cdot) \equiv V -$ to zbiór obiektów (np. **wektorów**), które można skalować (mnożyć przez elementy z **ciała liczbowego** $\boldsymbol{K}$) i dodawać.

Działania mnożenia (" $\cdot$ ": $K \times V \to V$) i dodawania (" $+$ ": $\mathrm{V} \times V \to V$) elementów przestrzeni liniowej spełniają następujące aksjomaty:

1) $\bigwedge_{\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V} \boldsymbol{u} + (\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w}$ (łączność)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$[x_1, y_1] + [x_2 + x_3, y_2 + y_3] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] + [x_3, y_3] = [x_1 + x_2 + x_3, y_1 + y_2 + y_3]$$

Przestrzeń liniowa

2) $\bigwedge_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v} \in V} \boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$ (przemienność)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$[x_1, y_1]+[x_2, y_2] = [x_1 + x_2, y_1 + y_2] = [x_2, y_2]+[x_1, y_1] = [x_2 + x_1, y_2 + y_1]$$

3) $\bigvee_{e \in V} \bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} \boldsymbol{e}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{e}=\boldsymbol{v}$ (element neutralny w przestrzeni V)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$[0,0] + [x, y]=[x, y]$$

Przestrzeń liniowa

4) $\bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} \bigvee_{\boldsymbol{v}' \in V} \boldsymbol{v} + \boldsymbol{v}' = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{e}$ (element odwrotny)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$[x, y] + [-\mathrm{x}, -\mathrm{y}] = [-x, -y] + [x, y] = [0,0]$$

Zbiór $(V, +)$ spełniający powyższe 4-ry aksjomaty tworzy **grupę abelową.**

Przestrzeń liniowa

5) $\bigwedge_{\substack{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\in V\\ \alpha\in K}} \alpha(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\alpha\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{v}$ (rozdzielność mnożenia przez skalar wzg. dodawania)

Przykład: $[x,y]\in\mathbb{R}^2$

$$\alpha[x_1+x_2,y_1+y_2]=[\alpha x_1+\alpha x_2,\alpha y_1+\alpha y_2]=\alpha[x_1,y_1]+\alpha[x_2,y_2]$$

6) $\bigwedge_{\substack{\boldsymbol{v}\in V\\ \alpha,\beta\in K}} (\alpha+\beta)\boldsymbol{v}=\alpha\boldsymbol{v}+\beta\boldsymbol{v}$ (rozdzielność mnożenia przez wektor wzg. dodawania)

Przykład: $[x,y]\in\mathbb{R}^2$

$$(\alpha+\beta)[x,y]=[\alpha x+\beta x,\alpha y+\beta y]=[(\alpha+\beta)x,(\alpha+\beta)y]=[\alpha x,\alpha y]+[\beta x,\beta y]=\alpha[x,y]+\beta[x,y]$$

Przestrzeń liniowa

7) $\bigwedge_{\substack{\boldsymbol{v} \in V \\ \alpha, \beta \in K}} \alpha(\beta \boldsymbol{v}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{v}$ (zgodność mnożenia przez skalar z mnożeniem skalarów)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$\alpha\,(\beta[x, y]) = \alpha[\beta x, \beta y] = [\alpha\beta x, \alpha\beta y] = \alpha\beta[x, y]$$

8) $\bigvee_{1 \in K} \bigwedge_{\boldsymbol{v} \in V} 1v = v$ (1 to element neutralny w ciele K)

Przykład: $[x, y] \in \mathbb{R}^2$

$$1[x, y] = [1x, 1y] = [x, y]$$

Przestrzeń wektorowa

n-wymiarowa przestrzeń wektorowa $(V, +, \mathbb{R}, \cdot) \equiv V$ to przestrzeń liniowa, która posiada układ n **liniowo niezależnych** generatorów $\boldsymbol{e_1, e_2, \dots, e_n} \in V$ zwany **bazą**

$$\{\boldsymbol{e_1, e_2, \dots, e_n}\} \equiv \{\boldsymbol{e_i}\}_{\boldsymbol{i \in \tilde{n}}}$$

wówczas przestrzeń wektorową V oznaczamy następująco:

$$\boldsymbol{V = lc_K\{e_1, e_2, \dots, e_n\} \equiv lc_K\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n\}}$$

Liczbę elementów bazy nazywamy **wymiarem** przestrzeni V i oznaczamy: $\boldsymbol{\dim V = n}$.

Układ wektorów $\boldsymbol{v_1, v_2, \dots, v_n} \in V$ (elementów przestrzeni wektorowej), $n \geq 2$, jest liniowo niezależny jeżeli dla $c_1, c_2, \dots, c_n \in K$ ze związku $\sum_{i=1}^{n} c_i \boldsymbol{v_i} = 0$ wynika, że: $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$

Iloczyn skalarny

Iloczyn skalarny na przestrzeni liniowej $(V, +, \mathbb{R}, \cdot)$ to odwzorowanie

$$\langle * \mid * \rangle : V \times V \ni \left(\vec{A}, \vec{B}\right) \mapsto \left\langle \vec{A} \middle| \vec{B} \right\rangle \in \mathbb{R},$$

spełniające dla dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$ oraz $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in V$ następujące warunki:

$$\left\langle \vec{A} \middle| \vec{B} \right\rangle = \left\langle \vec{B} \middle| \vec{A} \right\rangle, \left\langle \overrightarrow{\alpha A} \middle| \vec{B} \right\rangle = \alpha \left\langle \vec{B} \middle| \vec{A} \right\rangle,$$

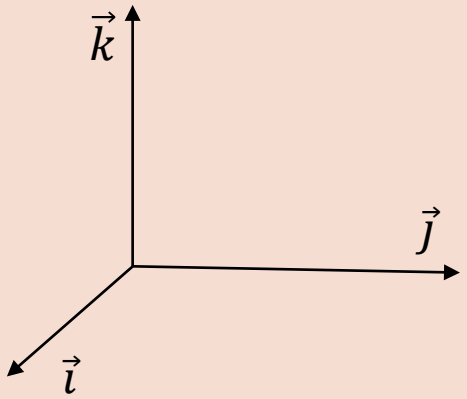
$$\left\langle \vec{A} + \vec{B} \middle| \vec{C} \right\rangle = \left\langle \vec{A} \middle| \vec{C} \right\rangle + \left\langle \vec{B} \middle| \vec{C} \right\rangle, \ \left\langle \vec{A} \middle| \vec{A} \right\rangle \in \mathbb{R}_0^+,$$

$$\left\langle \vec{A} \middle| \vec{A} \right\rangle = 0 \Longrightarrow A = 0,$$

gdzie (**iloczyn kartezjański** zbiorów V_1 i V_2): $V_1 \times V_2 \underset{=}{^{def}} \left\{ \left(\vec{A}, \vec{B}\right) | \vec{A} \in V_1 \wedge \vec{B} \in V_2 \right\}$

Iloczyn skalarny w rzeczywistej przestrzeni kartezjańskiej

Rzeczywista przestrzeń kartezjańska *3* – wymiarowa



$$\mathbb{R}^3 = lc_{\mathbb{R}}\{\vec{\imath}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| \cos \sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$\vec{A} = A\vec{e}_A \qquad \vec{e}_A = \frac{\vec{A}}{A} \qquad |\vec{e}_A| = 1$$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right) \cdot \left(B_x\vec{\imath} + B_y\vec{j} + B_z\vec{k}\right) = (A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z) \in \mathbb{R}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right) \cdot \left(A_x\vec{\imath} + A_y\vec{j} + A_z\vec{k}\right) = (A_x)^2 + \left(A_y\right)^2 + (A_z)^2 = A^2 \in \mathbb{R}$$

$$\vec{A} \cdot \vec{A} = A\vec{e}_A \cdot A\vec{e}_A = A^2\vec{e}_A \cdot \vec{e}_A \overset{def}{=} A^2\left(1 \cdot 1 \cos 0^\circ\right) = A^2 \rightarrow A = \sqrt{(A_x)^2 + \left(A_y\right)^2 + (A_z)^2}$$

Baza ortogonalna i ortonormalna

Baza $\{e_i\}_{i\in\tilde{n}}$ jest:

ortogonalna gdy: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \equiv \langle e_i | e_j \rangle = c_i \delta_{ij}; c_i \neq 0; i,j \in \tilde{n}$

ortonormalna gdy: $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j \equiv \langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij}; \; i,j \in \tilde{n}$

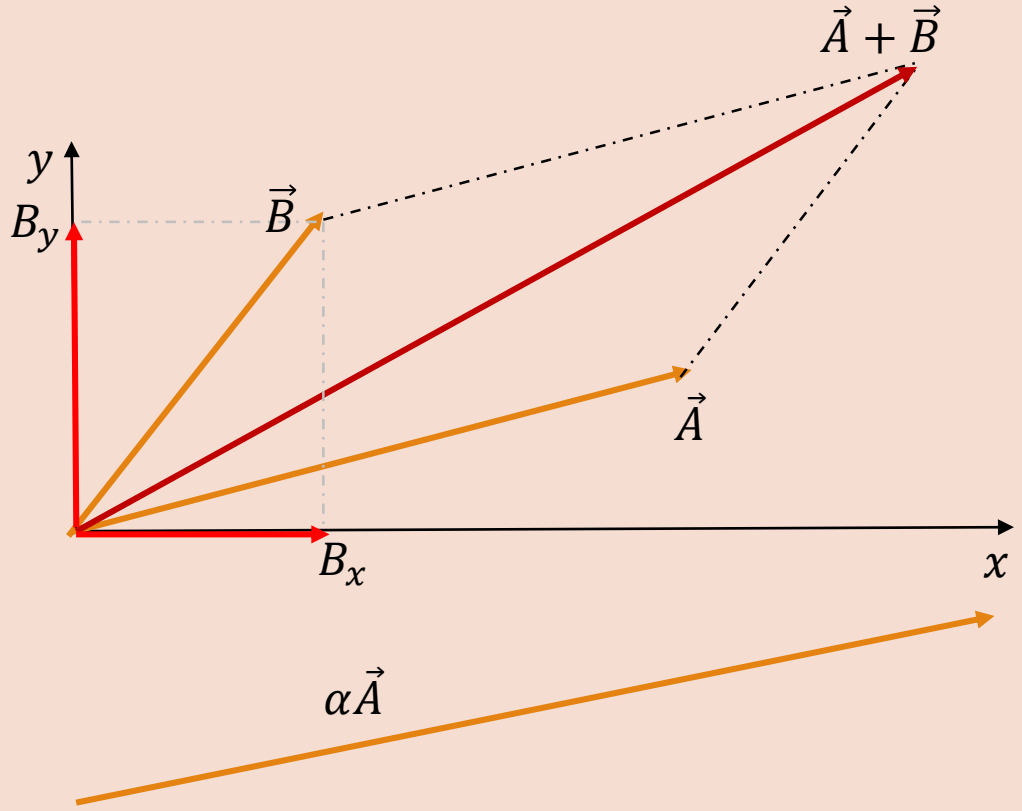
Delta Kroneckera:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{gdy } i = j \\ 0, \text{gdy } i \neq j \end{cases}; i,j \in \tilde{n}$$

Przedstawienia wektora

Przykład: $\mathbb{R}^2 = lc_{\mathbb{R}}\{\vec{i}, \vec{j}\}$

Geometryczne przedstawienie wektora



Algebraiczne przedstawienie wektora

$$\vec{A} = [A_x, A_y], \quad \vec{B} = [B_x, B_y]$$

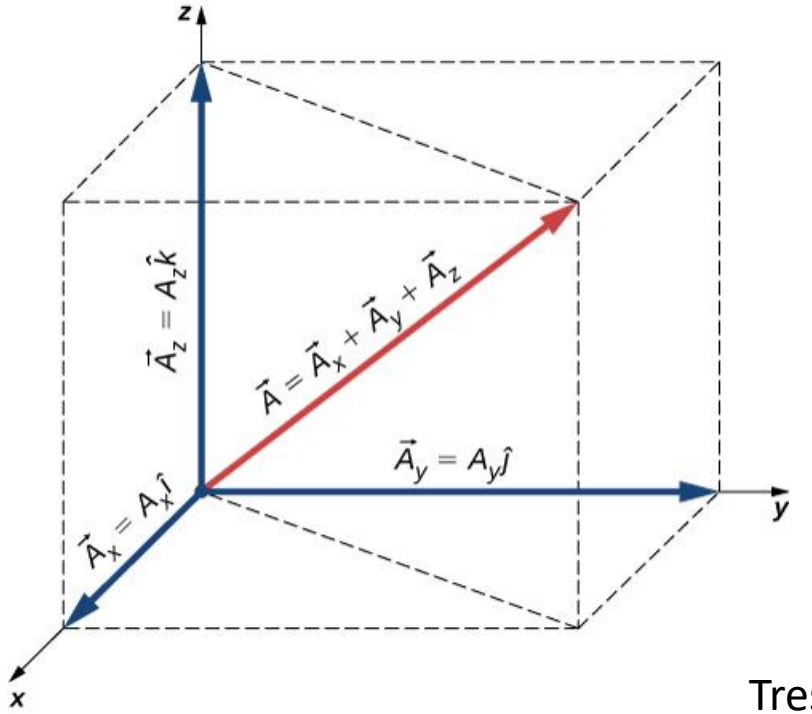
$$\vec{A} + \vec{B} = [A_x + B_x, A_y + B_y]$$

$$\alpha\vec{A} = [\alpha A_x, \alpha A_y]$$

Przedstawienia wektora

Przykład: $\mathbb{R}^3 = lc_{\mathbb{R}}\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$

Jak z jednej ukośnej strzałki zrobić trzy łatwe?



Trzy wzajemnie prostopadłe wektory jednostkowe definiują ortonormalną bazę kartezjańskiego układu współrzędnych w przestrzeni trójwymiarowej. Od kolejności podpisywania osi zależy orientacja układu współrzędnych. Układ przedstawiony na rysunku jest układem prawoskrętnym.

Wektor w przestrzeni trójwymiarowej jest sumą swoich składowych.

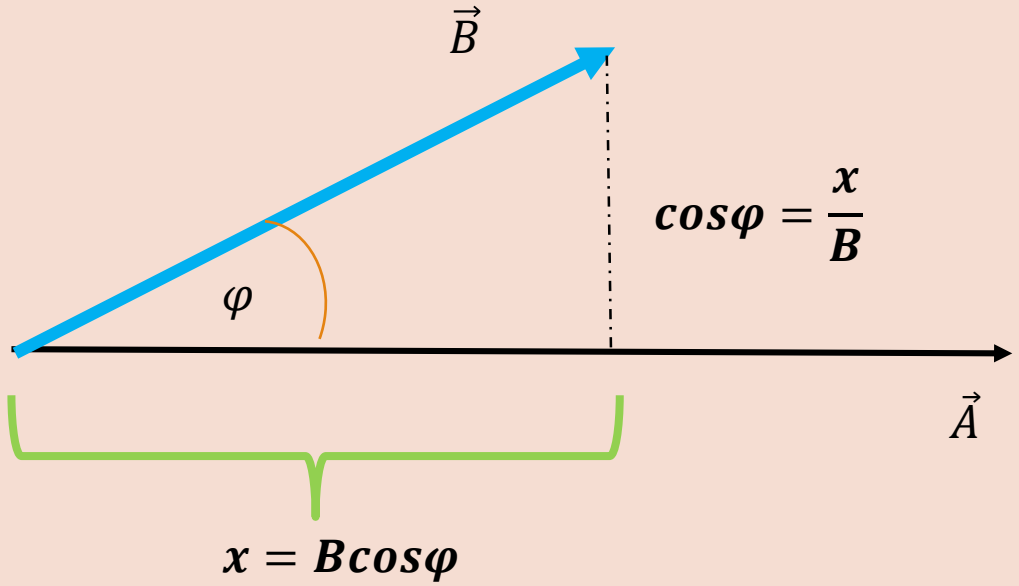
Treści dostępne za darmo na:
https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/2-2-uklady-wspolrzednych-i-skladowe-wektora

Interpretacja geometryczna iloczynu skalarnego wektorów w $\mathbb{R}^3$

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}| cos\sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})$$

$$|\vec{A}| \equiv A$$

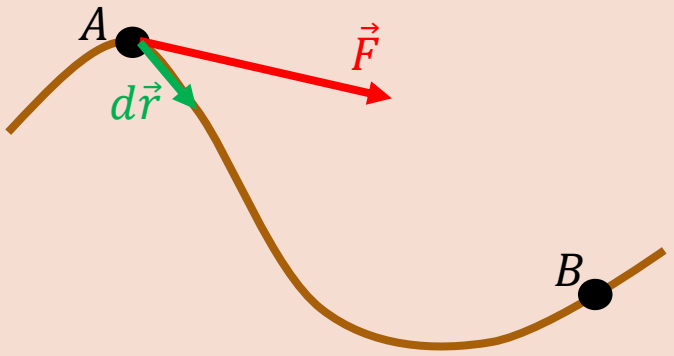
$$\vec{A} \cdot \vec{B} = ABcos\varphi$$



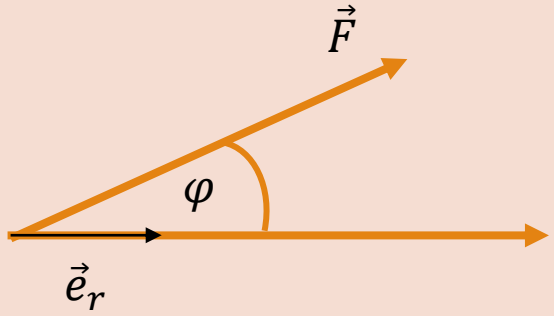
Wybrane zastosowania iloczynu skalarnego: **praca siły**

Praca W siły $\vec{F}$ na drodze $\overrightarrow{\Delta r}$

$$\boldsymbol{W = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\Delta r} = \left|\vec{F}\right|\left|\overrightarrow{\Delta r}\right| \cos\sphericalangle\left(\vec{F}, \overrightarrow{\Delta r}\right)}$$



Kiedy praca siły jest równa zeru?

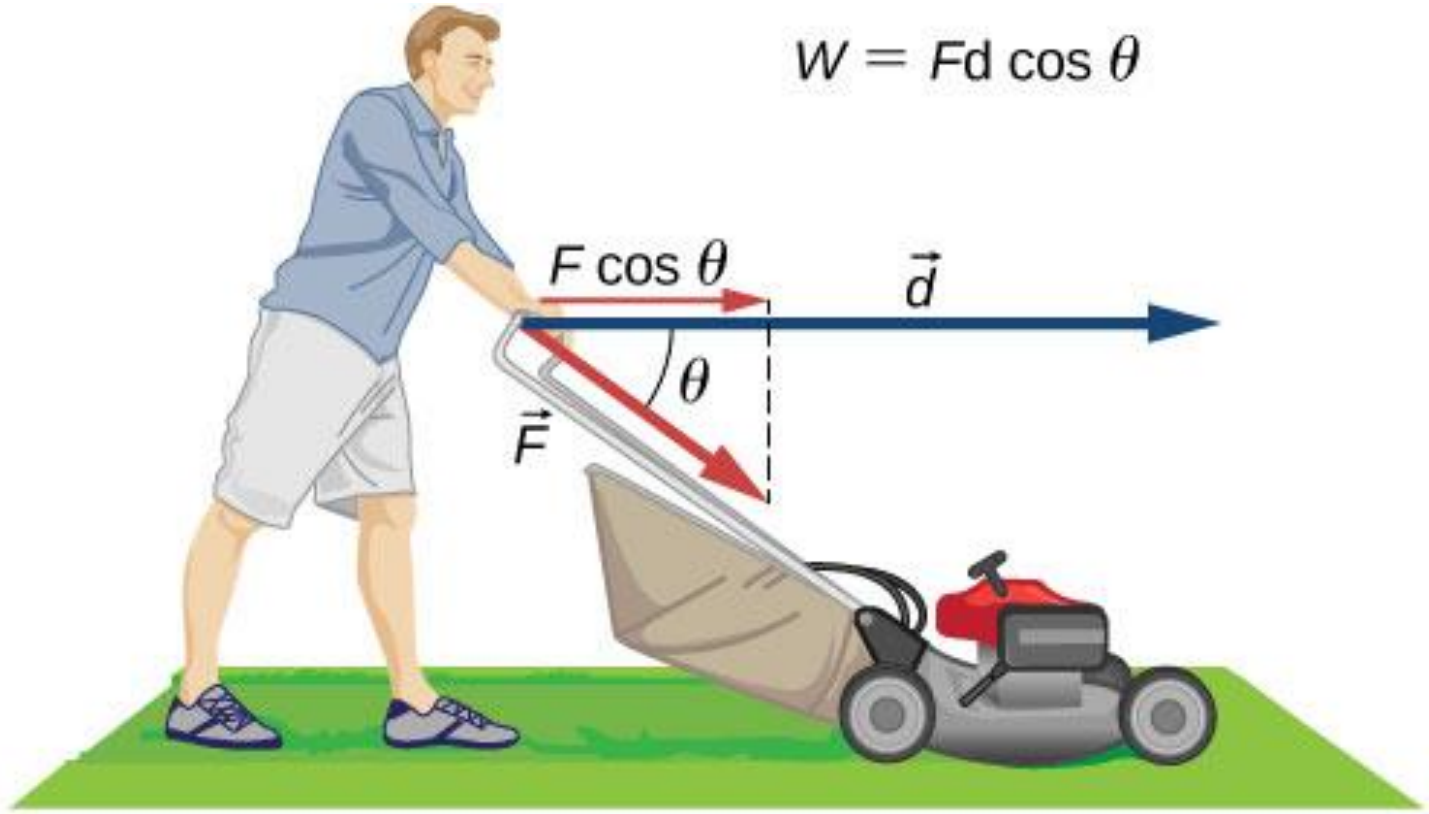


$$\overrightarrow{\Delta r} = \left|\overrightarrow{\Delta r}\right|\vec{e}_r \equiv \Delta r \vec{e}_r$$

$$\sphericalangle\left(\vec{F}, \overrightarrow{\Delta r}\right) \equiv \varphi$$

Praca stałej siły

Jeśli pchasz ukośnie — jaka część siły naprawdę działa w kierunku ruchu?

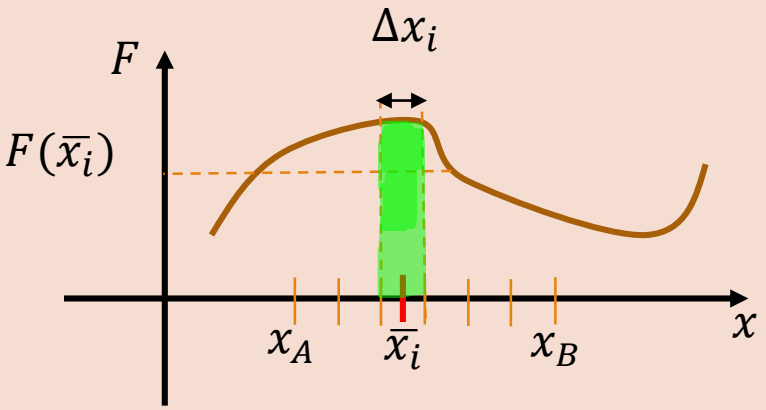


Treści dostępne za darmo na:
https://openstax. org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/7-1-praca

Wybrane zastosowania iloczynu skalarnego: **praca siły zależnej od x**

$$\boldsymbol{W = \int_{x_A}^{x_B} F(x)dx}$$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



$$\boldsymbol{W = \lim_{\Delta x_i \to 0} \sum_i F(\overline{x_i})\Delta x_i}$$

Wybrane zastosowania iloczynu skalarnego: **fala harmoniczna płaska**

$$\boldsymbol{s(\vec{r},t) = Acos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0)}$$

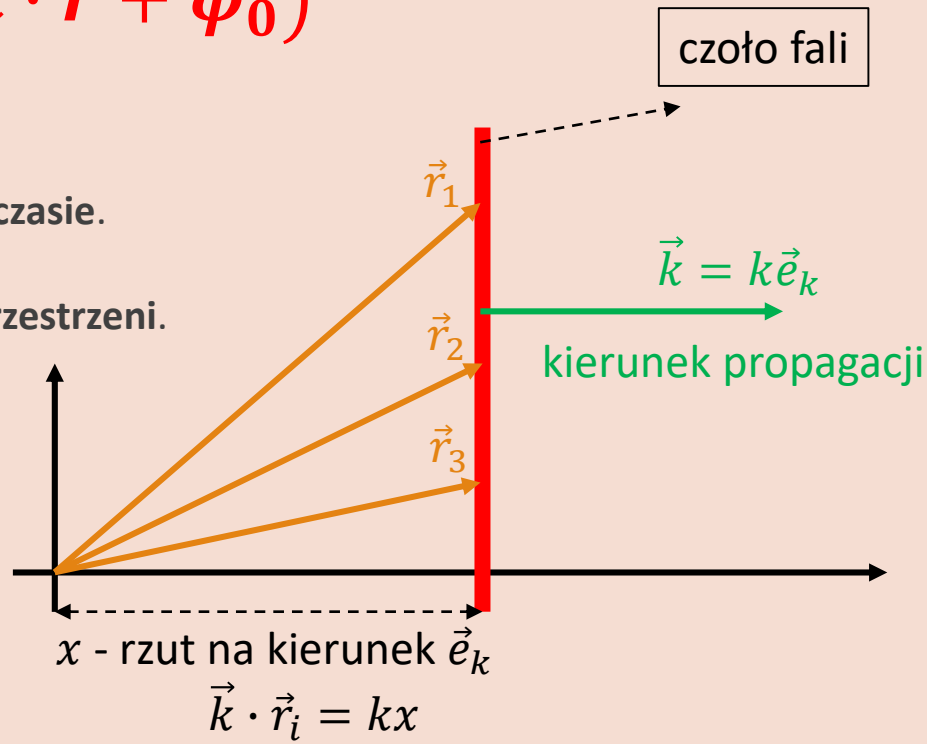
ω – częstość kołowa, $[\omega] = \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ - określa, **jak szybko zmienia się faza w czasie**.

$\vec{k}$ - wektor falowy, $[\vec{k}] = \frac{\text{rad}}{\text{m}}$, $|\vec{k}| = \frac{2\pi}{\lambda}$ - określa, **jak szybko zmienia się faza w przestrzeni**.

λ – długość fali, $[\lambda] = \text{m}$ - określa, **jaką odległość trzeba przebyć w przestrzeni, aby faza zmieniła się o pełny cykl 2π**.

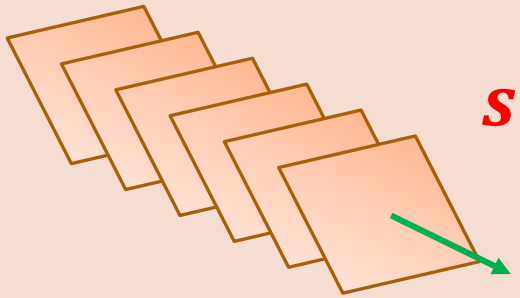
$\vec{r}$ - wektor wodzący punktu drgającego

φ_0 - faza początkowa

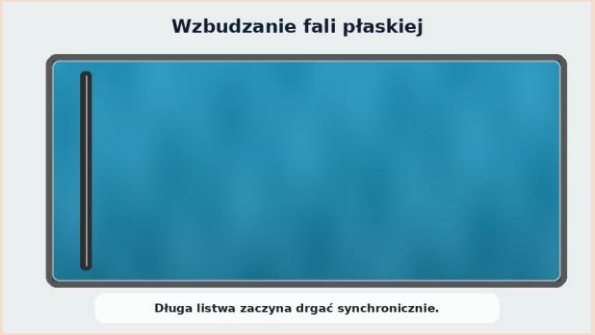


Wszystkie punkty tej powierzchni mają to samo x, więc mają tę samą fazę!

Wybrane zastosowania iloczynu skalarnego: **fala harmoniczna płaska**



$$s(\vec{r},t) = A\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)$$



Iloczyn skalarny zachowuje tylko składową położenia wzdłuż $\vec{e}_k$**!**

Jeśli przesuwasz się prostopadle do k, faza fali się nie zmienia!

Dla dwóch punktów jednej powierzchni falowej: $\vec{k}\cdot(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = 0$

Powierzchnie falowe (powierzchnie stałej fazy) są płaszczyznami prostopadłymi do $\vec{k}$ **— stąd „fala płaska”.**

Macierze

Macierz A o rozmiarze $m \times n$ (m wierszy, n kolumn):

$$[a_{ij}]_{mn} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \equiv A, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Mnożenie macierzy przez liczbę $\alpha \in K$:

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dodawanie macierzy:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} \overset{def}{=} \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & \cdots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \cdots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy

Mnożyć można wyłącznie macierze, z których pierwsza ma tyle kolumn, co druga wierszy.

$$\mathbf{C} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$$

$$c_{i,j} = \sum_{r=1}^{m} a_{i,r} b_{r,j}$$

$i = 1, \dots, n$ $\quad$ $j = 1, \dots, p$

m – ilość kolumn w macierzy A równa ilości wierszy w macierzy B

n – ilość wierszy w macierzy A

p – ilość kolumn w macierzy B

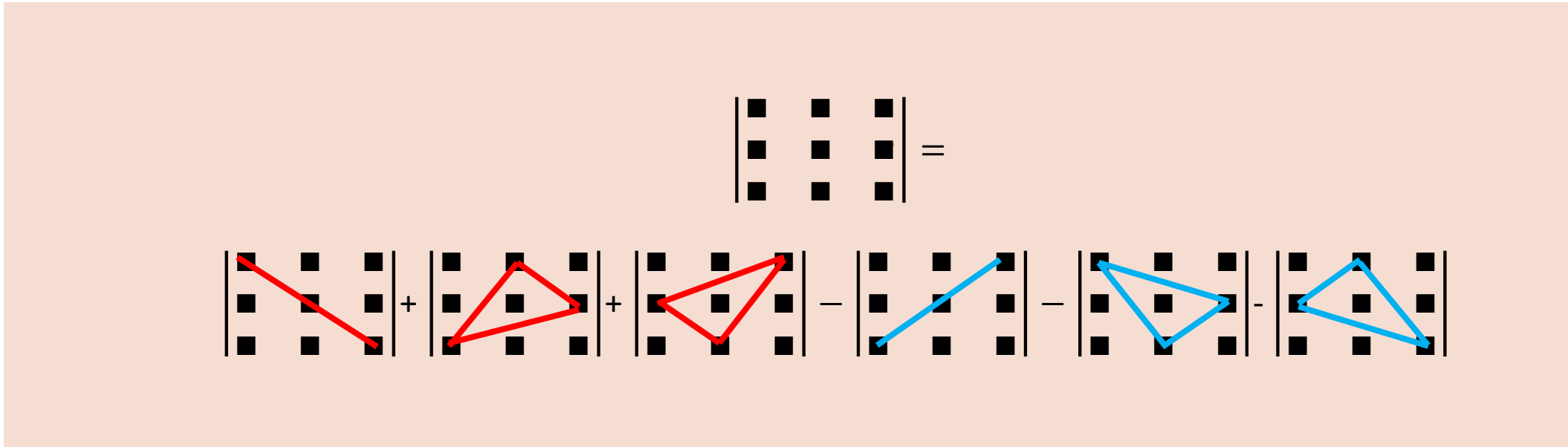
Wyznacznik macierzy kwadratowej

$$|A| \equiv \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_n} \varepsilon_{k_1 k_2,\ldots,k_n} a_{1k_1} a_{2k_2} \ldots a_{nk_n}$$

Suma rozciąga się na wszystkie możliwe permutacje liczb $1,2, \ldots n$

$$\varepsilon = \begin{cases} 1, & \text{gdy permutacja } k_1 k_2 \ldots k_n \text{ jest parzysta} \\ -1, & \text{gdy permutacja } k_1 k_2 \ldots k_n \text{ jest nieparzysta} \end{cases}$$

Wyznacznik macierzy kwadratowej stopnia 3



Reprezentacja macierzowa wektorów

Baza kanoniczna w $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{\imath} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \vec{\jmath} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \vec{k} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\langle \vec{A} | \vec{B} \rangle = \vec{A}^T \vec{B}$$

Dla $A \equiv [a_{ij}]_{mn}$; $A^T \equiv [a_{ij}]_{nm}$

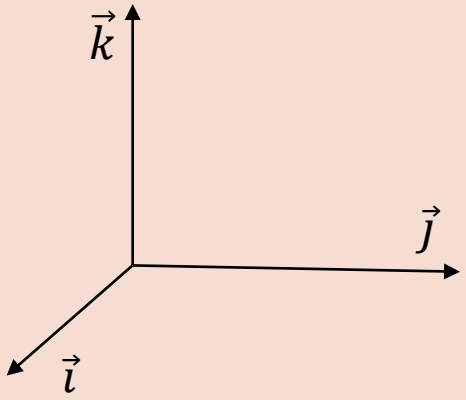
$$\vec{A} = \begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}, \vec{A^T} = [A_x \quad A_y \quad A_z]$$

$$\langle \vec{A} | \vec{B} \rangle = [A_x \quad A_y \quad A_z] \begin{bmatrix}B_x\\B_y\\B_z\end{bmatrix} =$$

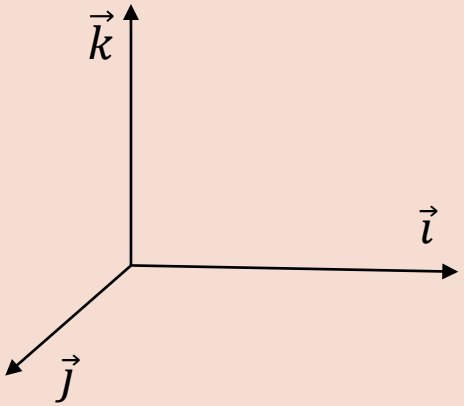
$$= A_x\, B_x + A_y B_y + A_z B_z$$

Przestrzeń zorientowana

Przestrzeń z zadanym układem współrzędnych jest **zorientowana**!



Układ zorientowany w prawo



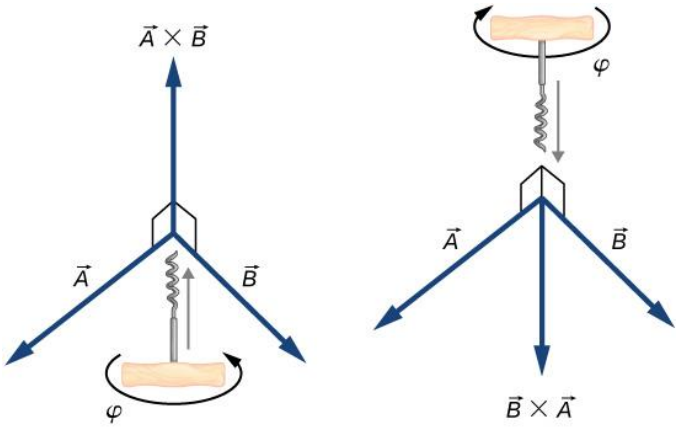
Układ zorientowany w lewo

Iloczyn wektorowy w rzeczywistej przestrzeni kartezjańskiej ($\mathbb{R}^3$)

$$\vec{A} = A_x\vec{\imath} + A_y\vec{\jmath} + A_z\vec{k} \equiv \left[A_x, A_y, A_z\right] = A\vec{e}_A \quad \vec{B} = B\vec{e}_B$$

$$\vec{C} = C\vec{e}_C = \vec{A} \times \vec{B} = \vec{\imath}\left(A_yB_z - A_zB_y\right) + \vec{\jmath}\left(A_zB_x - A_xB_z\right) + \vec{k}\left(A_xB_y - A_yB_x\right)$$

$$C = \left|\vec{A} \times \vec{B}\right| = A\,B\,sin\sphericalangle\left(\vec{A}, \vec{B}\right)$$



Treści dostępne za darmo na:
https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/2-2-uklady-wspolrzednych-i-skladowe-wektora

Własności Iloczynu wektorowego ($\mathbb{R}^3$)

Wektor $\vec{C}$ jest wektorem normalnym do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$, o zwrocie takim, że trójka $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{A} \times \vec{B})$ ma orientację zgodną z orientacją przestrzeni.

Własności iloczynu wektorowego dla dowolnych $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in V$ i $c \in \mathbb{R}$:

$$\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$$

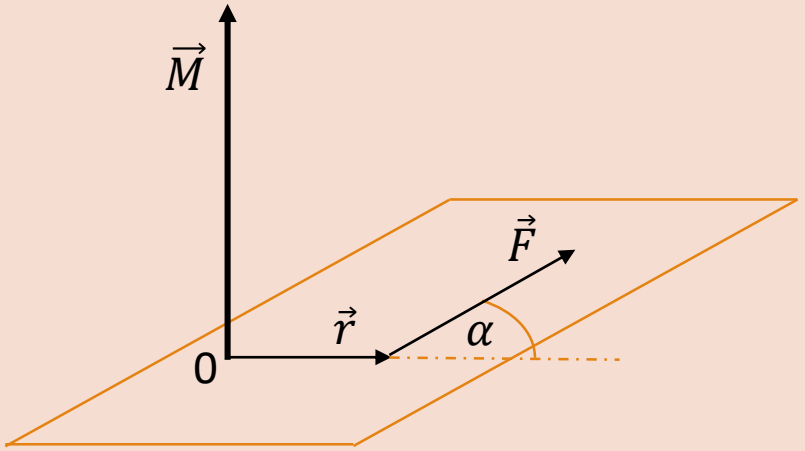
$$\vec{C} \times (\vec{A} + \vec{B}) = \vec{C} \times \vec{A} + \vec{C} \times \vec{B}$$

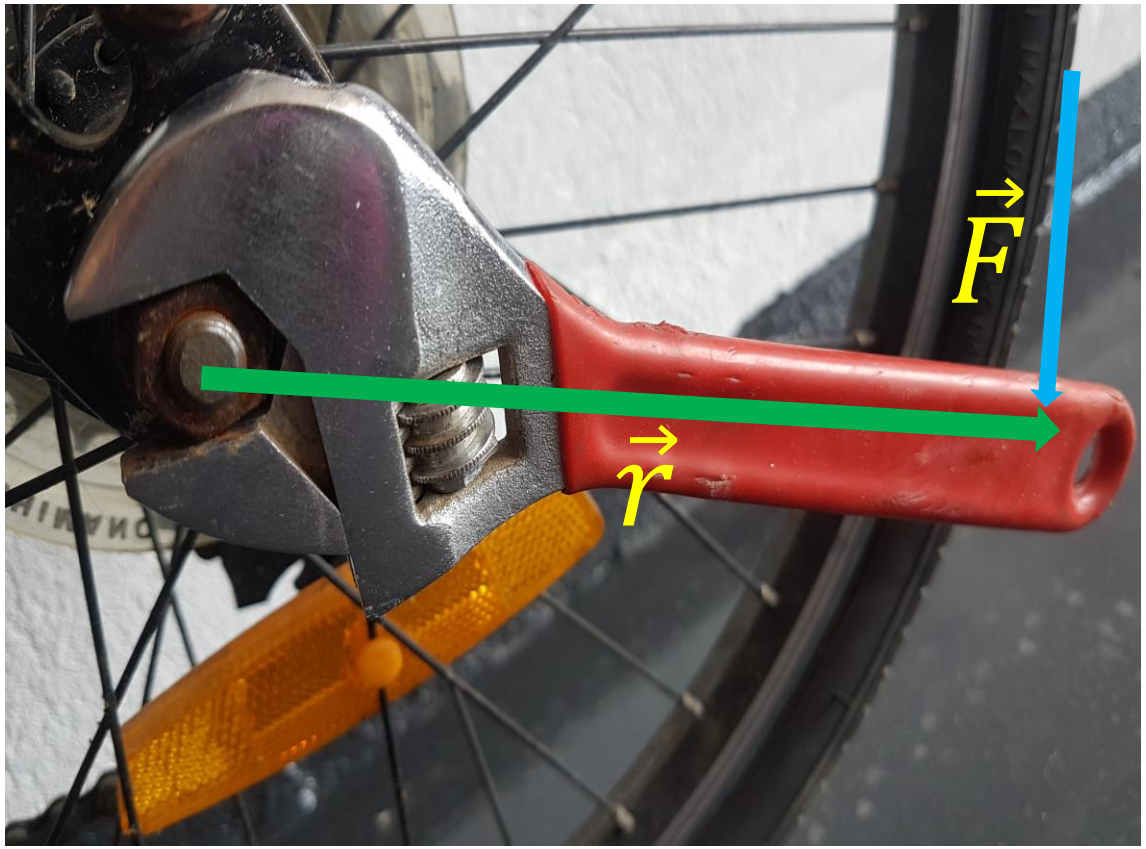
$$(c\vec{A}) \times \vec{B} = c(\vec{A} \times \vec{B}), \quad \vec{A} \times \vec{B} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \vec{A} \parallel \vec{B}$$

Wybrane zastosowania iloczynu wektorowego: **moment siły wzg. punktu**

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}||\vec{F}|sin\alpha$$





Momenty siły w jeździe na rowerze

Pedałowanie: moment siły zwiększa moment pędu korby i napędza układ.

Ten sam moment siły może zwiększać wartość momentu pędu albo zmieniać jego kierunek.

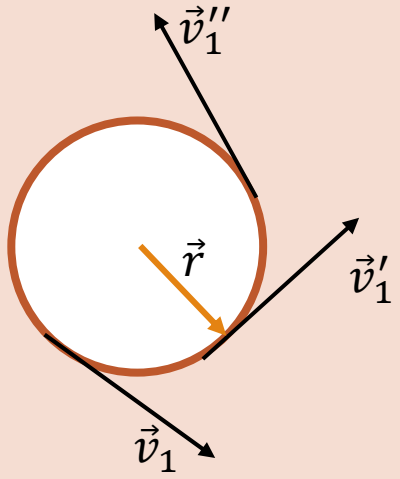
Moment siły jest odpowiednikiem siły w ruchu obrotowym — opisuje zdolność siły do wywołania lub zmiany obrotu ciała.



Przy stojącym rowerze moment ciężaru buduje moment pędu przewracania.

Rower jadący: moment siły może przede wszystkim obracać kierunek już istniejącego wektora momentu pędu koła.

Wybrane zastosowania iloczynu wektorowego: **moment pędu**

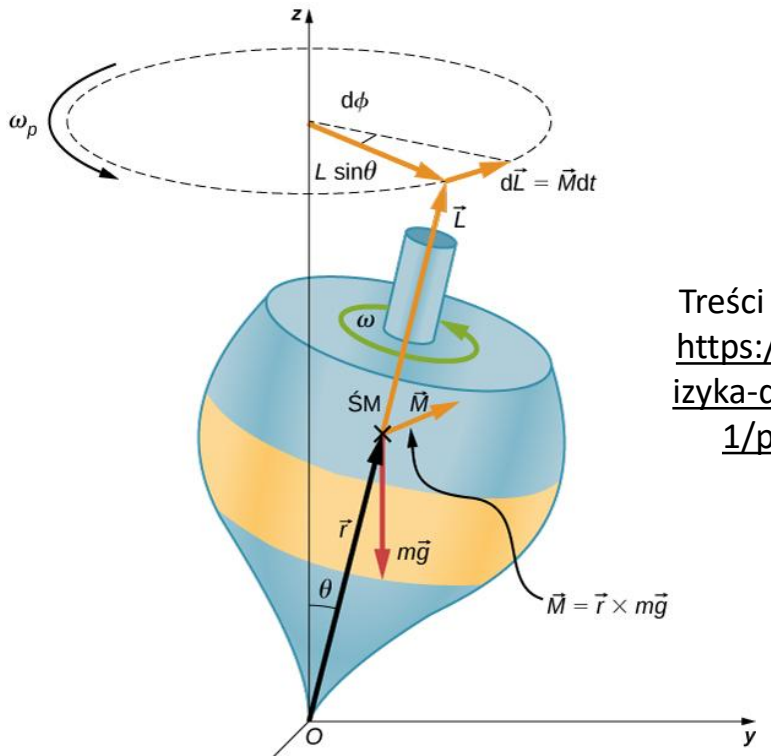


$$\vec{p}_1 = m\vec{v}_1$$

$$\vec{p}_1' = m\vec{v}_1'$$

$$\vec{L}_1 = \vec{r} \times \vec{p}_1 = \vec{L}_1' = \vec{r} \times \vec{p}_1'$$

$\vec{p}$ - pęd, $\vec{v}$ - prędkość liniowa



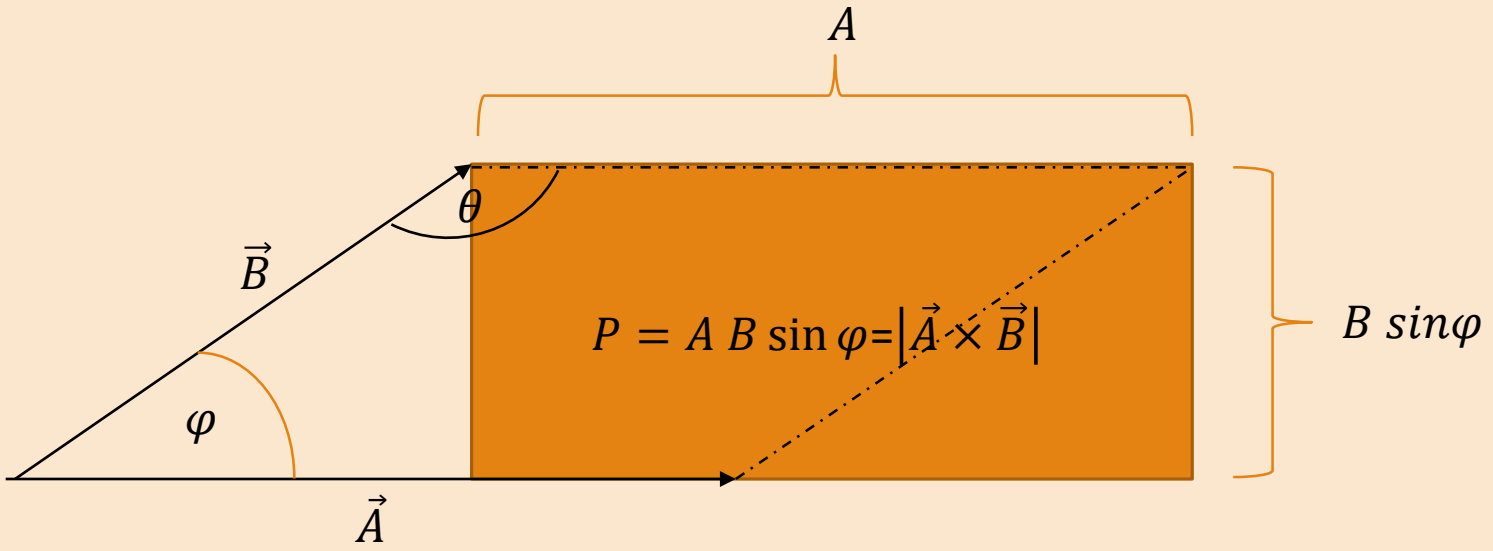
Treści dostępne za darmo na https://openstax.org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/11-4-precesja-zyroskopu

Siła zmienia pęd w ruchu postępowym $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$, a moment siły zmienia moment pędu w ruchu obrotowym $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$.

Interpretacja geometryczna iloczynu wektorowego

Moduł iloczynu wektorowego $\vec{A} \times \vec{B}$ jest równy polu równoległoboku

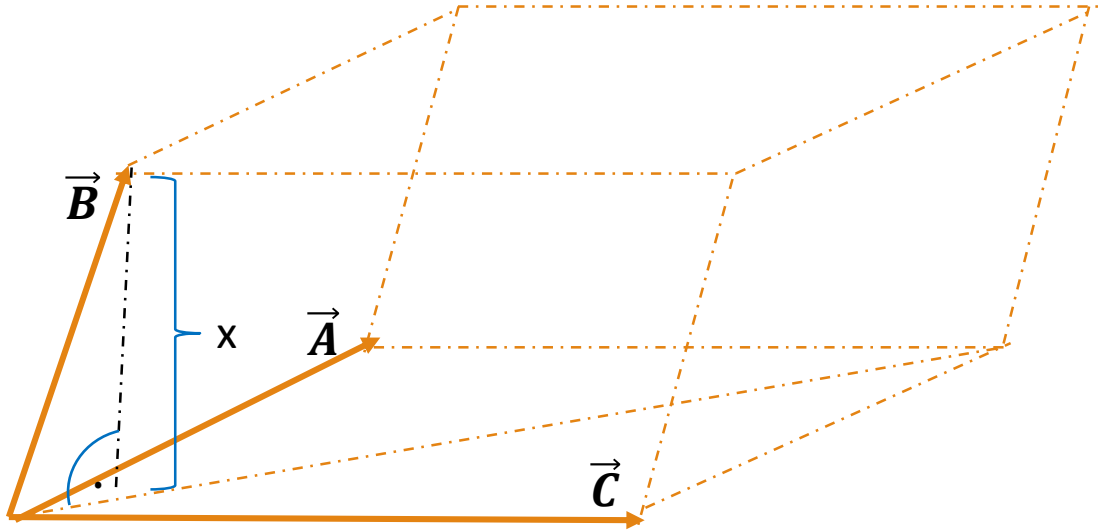
o bokach zadanych przez wektory $\vec{A}$ i $\vec{B}$ oraz kątach $\varphi = \sphericalangle(\vec{A}, \vec{B})$ i $\theta = \pi - \varphi$:



Interpretacja geometryczna iloczynu mieszanego: **objętość równoległościanu**

$$\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A})$$

$$\left|\vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})\right| = C_1A_2B_3 + C_2A_3B_1 + C_3A_1B_2 - C_3A_2B_1 - C_1A_3B_2 - C_2A_1B_3 \equiv \begin{vmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$



$$V = \left|(\vec{C} \times \vec{A}) \cdot \vec{B}\right|$$

Przykłady

Zad. 1.

Wyprowadź równanie na iloczyn skalarny $\vec{\boldsymbol{A}} \cdot \vec{\boldsymbol{B}} = \boldsymbol{A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z}$ dwóch wektorów $\vec{A}$, $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$, wyrażonych za pomocą wektorów jednostkowych.

Zad. 2.

Wyprowadź równanie na iloczyn wektorowy $\vec{\boldsymbol{A}} \times \vec{\boldsymbol{B}} = \vec{\boldsymbol{\imath}}\left(\boldsymbol{A_y B_z - A_z B_y}\right) + \vec{\boldsymbol{\jmath}}(\boldsymbol{A_z B_x - A_x B_z}) + \vec{\boldsymbol{k}}\left(\boldsymbol{A_x B_y - A_y B_x}\right)$ dwóch wektorów $\vec{A}$, $\vec{B} \in \mathbb{R}^3$, wyrażonych za pomocą wektorów jednostkowych.

Zad.3.

Znaleźć składową i wektor składowy wektora $\vec{A} = -2\vec{\imath} + \vec{k}$ wzdłuż wektora $\vec{B} = \vec{\jmath} + \vec{k}$.

Literatura

1. E. Karaśkiewicz, Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, W-wa 1976 (lub inne wydania).

2. T. Trajdos, Matematyka cz. 3, WN-T, W-wa 1999 (lub inne wydania).

3. W. Moebs, S. J. Ling, J. Sanny , Fizyka dla szkół wyższych Tom I, ISBN-13: 978-83-948838-1-2

https://openstax.org/details/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1

4. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki 1, PWN, W-wa 2011 (lub inne wydania).