

# Zasady zachowania energii i pędu. Zderzenia.

---

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

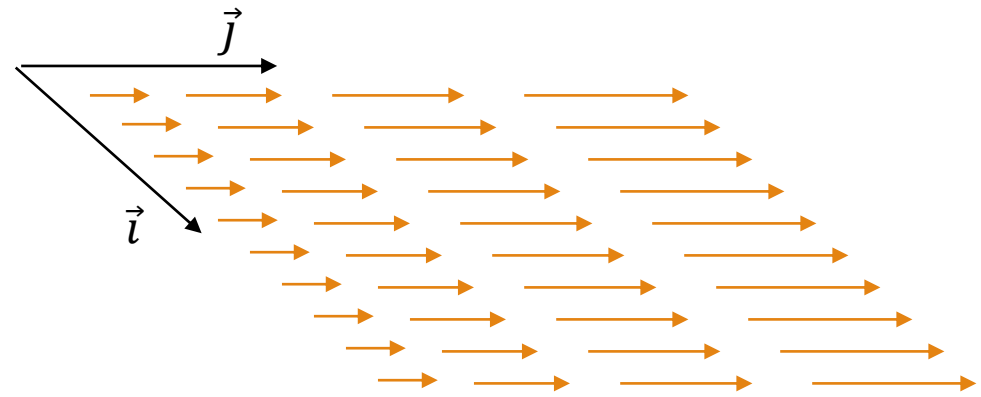
POLITECHNIKA RZESZOWSKA

# Gradient

**Gradient** wielkości skalarnej oznacza spadek lub narastanie tej wielkości w określonym kierunku!

$$\nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$df = \text{grad} f \cdot \vec{dr}$$



$$\nabla f = \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y}$$

# Dywergencja – przestrzenna gęstość strumienia pola wektorowego

$$\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$$

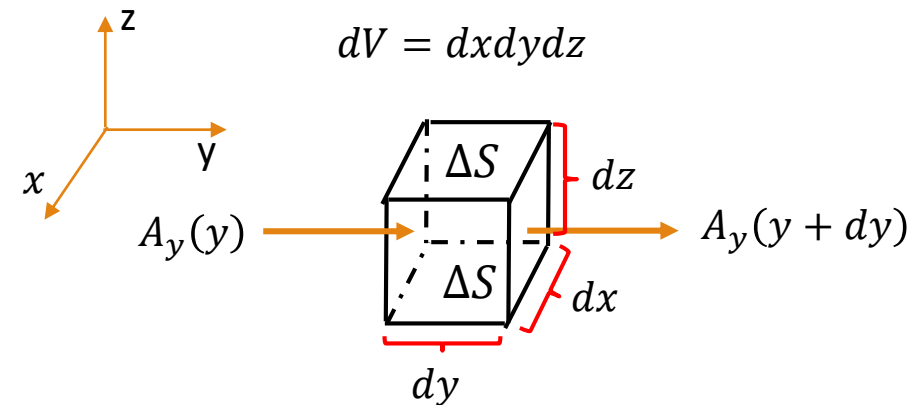
$$\operatorname{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} dx = A_x(x + dx) - A_x(x)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} dy = A_y(y + dy) - A_y(y)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} dz = A_z(z + dz) - A_z(z)$$

Elementarny strumień  $d\Phi_y$  z powierzchni prostopadłej do osi y:



$$d\Phi_y = [A_y(y + dy) - A_y(y)] dz dx = \frac{\partial A_y}{\partial y} dx dy dz = \frac{\partial A_y}{\partial y} dV$$

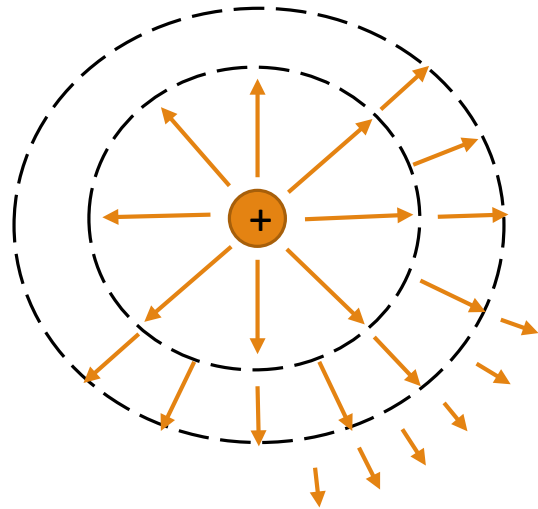
Całkowity elementarny strumień  $d\Phi$  wynosi:

$$d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = \operatorname{div}\vec{A} dV$$

$$\operatorname{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} d\Phi$$

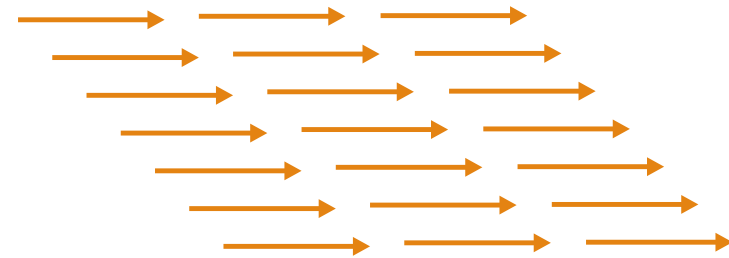
# Dywergencja - zastosowania

Dywergencja indukcji pola elektrycznego:

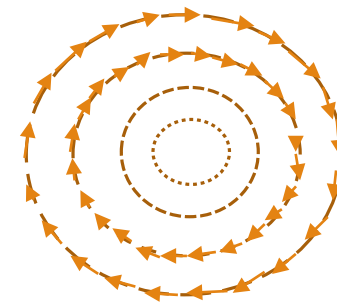


$$\operatorname{div} \vec{D} \neq 0$$

Pola bezźródłowe:



Dywergencja indukcji pola magnetycznego:



$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

# Rotacja wektora

---

$$\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$$

$$\mathit{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \equiv$$

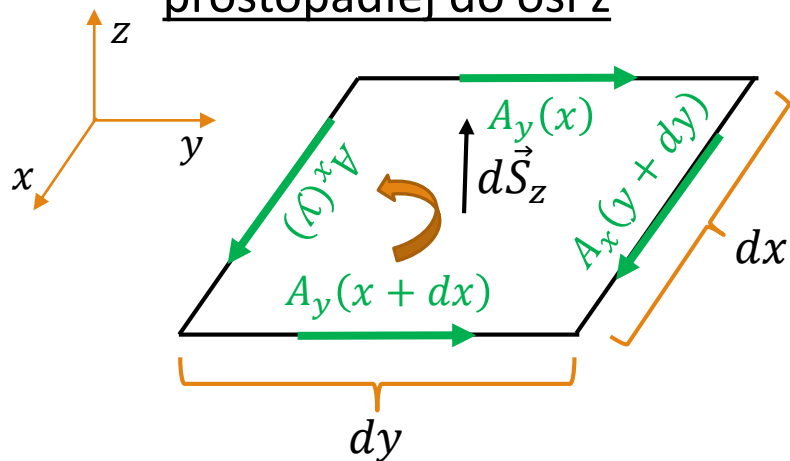
$$\equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

# Rotacja wektora

Całkowita elementarna cyrkulacja  $dO$  wynosi:

$$dO = \int \vec{A} \cdot d\vec{r} = dO_x + dO_y + dO_z$$

Elementarna cyrkulacja  $dO_z$  w płaszczyźnie prostopadłej do osi  $z$



$$A_x(y + dy) = A_x(y) + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy$$

$$dO_z = \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

$$dO_x = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz$$

$$dO_y = \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz dx$$

$$dO = \left( \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dy dz + \left( \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dz dx + \left( \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dx dy$$

$$dO = (\text{rot} \vec{A})_x dS_z + (\text{rot} \vec{A})_y dS_y + (\text{rot} \vec{A})_z dS_x$$

$$(\text{rot} \vec{A})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} dO_n$$

# Energia potencjalna

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

**Pole sił zależnych od położenia:**  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

**Jednorodne pole sił** występuje, gdy siły są stałe co do wartości i kierunku we wszystkich punktach pola np. pole grawitacyjne w pobliżu Ziemi.

**Praca siły pola:**

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

**Siła potencjalna zachowawcza:**  $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})$

**Pole siły potencjalnej zachowawczej jest bezwirowe:**

$$\text{rot}\vec{F} = 0$$

**Praca potencjalnej zachowawczej siły pola:**

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{AB} \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$W_{AB} = - \int_{V_A}^{V_B} dV = V_A - V_B$$

**Praca siły potencjalnej zachowawczej nie zależy od drogi wzdłuż której jest wykonywana, ale tylko od położenia jej punktu początkowego i końcowego.**

**Energia potencjalna:**  $V(\vec{r}) \equiv E_p$

# Zasada równoważności pracy i energii kinetycznej

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F}_w \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) = \vec{F}_w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left( \frac{mv^2}{2} \right) dt = \int_{AB} \vec{F}_w \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{AB} \vec{F}_w \cdot d\vec{r}$$

Energia kinetyczna  $E_k$  punktu materialnego o masie  $m$  poruszającego się z prędkością  $\vec{v}$ :

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = \text{praca siły } \vec{F}_w$$

$$E_{k2} - E_{k1} = W$$

Zmiana energii kinetycznej punktu materialnego w skończonym przedziale czasu równa się pracy wykonanej w tym samym czasie przez siłę wypadkową  $\vec{F}_w$ .



# Zasada zachowania energii

Praca wykonana przez wypadkową siłę  $\vec{F}_w$ :

$$\int_{AB} \vec{F}_w \cdot d\vec{r}$$

Pole siły potencjalnej zachowawczej:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\mathit{grad} V(\vec{r})$$

$$E_{k2} - E_{k1} = -\int_{AB} \mathit{grad} V(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = -\int_{V_1}^{V_2} dV$$

$$E_{k2} - E_{k1} = V_1 - V_2$$

$$E_{k2} + V_2 = E_{k1} + V_1$$

# Zasada zachowania pędu

Pęd  $\vec{p}$  punktu materialnego poruszającego się prędkością  $\vec{v}$ :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Drugie prawo Newtona dla punktu materialnego, na które działają siły o wypadkowej  $\vec{F}_w$ :

$$\vec{F}_w = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Popęd  $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$  sił działających na punkt materialny w przedziale czasu  $\Delta t = t_2 - t_1$ :

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\Delta\vec{v}$$

Gdy na punkt materialny nie działają żadne siły  $\vec{F}_w = 0$  (popęd jest równy 0):

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0$$

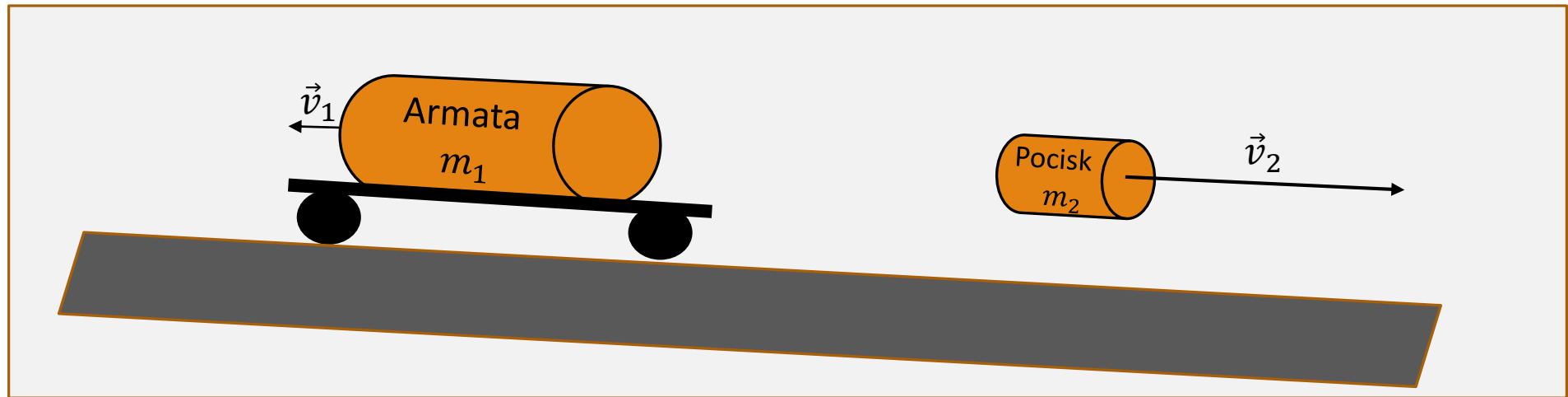


$$\vec{p} = \text{const.}$$

Prawo zachowania pędu jest konsekwencją jednorodności przestrzeni.

# Zasada zachowania pędu

Spoczywający względem podłoża wózek z armatą wystrzeliwującą pocisk



Iloczyn masy i wartości wektora prędkości dla wózka z armatą jest taki sam jak dla pocisku.

# Zderzenia

---

**Zderzenia to pewne (relatywnie krótkie) zdarzenie, podczas którego biorące w nim udział ciała oddziałują na siebie siłami.**

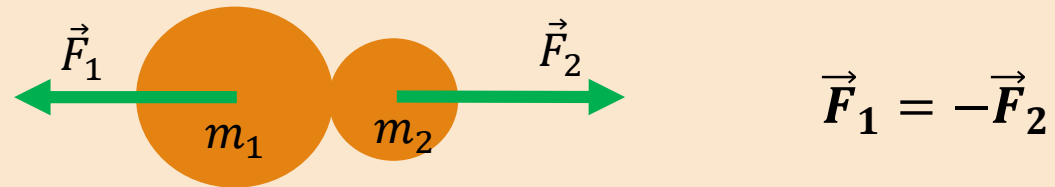
**Zderzenia nie zmieniają całkowitego pędu układu!**

Ze względu na geometrię zjawiska zderzenia dzielimy na **centralne** i **niecentralne**. Zderzenie dwóch ciał jest **centralne**, jeżeli oba ciała poruszają się po tej samej prostej, zarówno przed zderzeniem, jak i po zderzeniu np. zderzenie kul, których prędkości skierowane są wzdłuż linii łączącej środki tych kul. Zderzenie **niecentralne** ma miejsce wtedy, gdy zderzające się ze sobą ciała przed zderzeniem poruszają wzdłuż innych prostych niż po zderzeniu.

Zderzenia dzielimy również na **sprężyste** i **niesprężyste**. W zderzeniach **sprężystych**, całkowita energia kinetyczna jest zachowana tzn. energia kinetyczna ciał po zderzeniu jest równa całkowitej energii kinetycznej ciał przed zderzeniem. W zderzeniach **niesprężystych** energia kinetyczna nie jest zachowana, po zderzeniu ciała poruszają się razem z jednakową prędkością.

# Zderzenia

Zmiany pędów cząstek pod wpływem zderzenia:



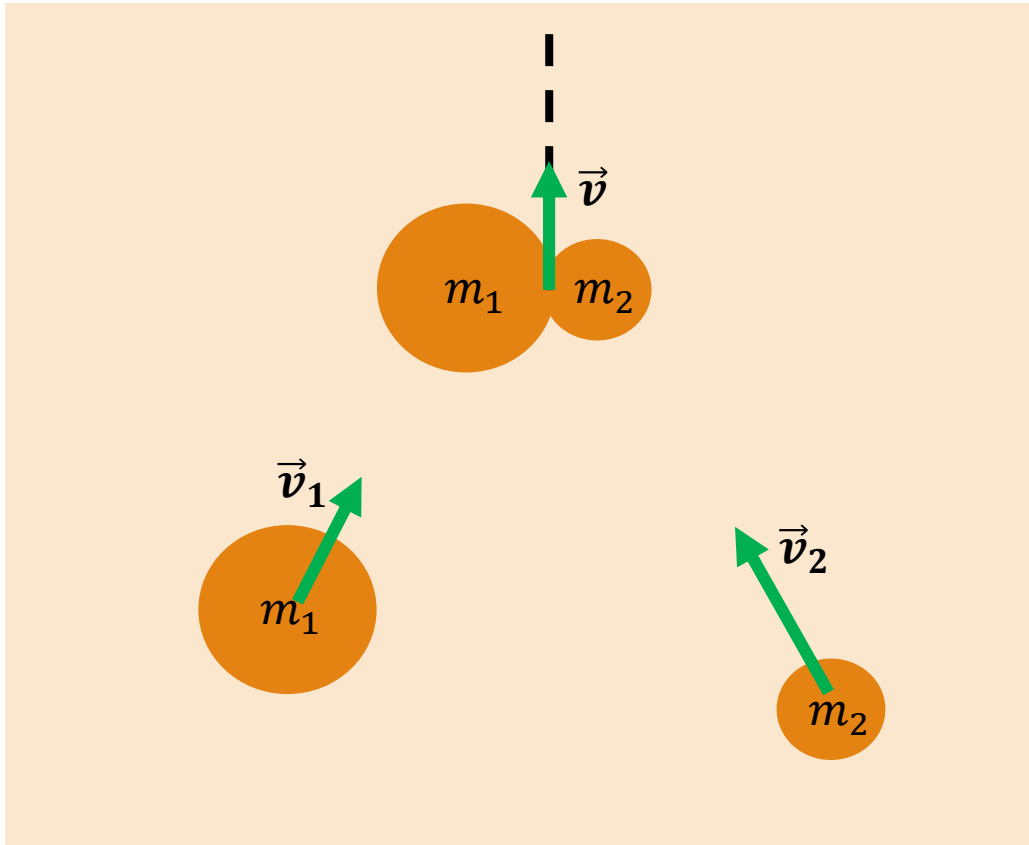
Popęd siły  $\vec{F}_1$ :  $\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_1\Delta t$

Popęd siły  $\vec{F}_2$ :  $\Delta\vec{p}_2 = \vec{F}_2\Delta t$

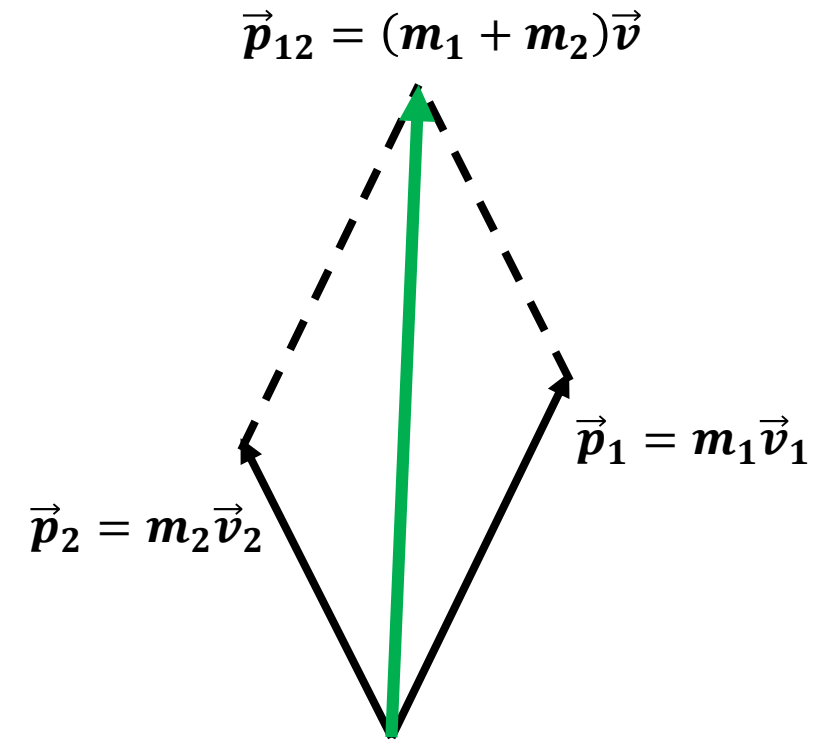
$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = \mathbf{0}$$

**Podczas zderzenia obowiązuje prawo zachowania całkowitego pędu cząstek!**

# Zderzenia niesprężyste, niecentralne dwóch kul

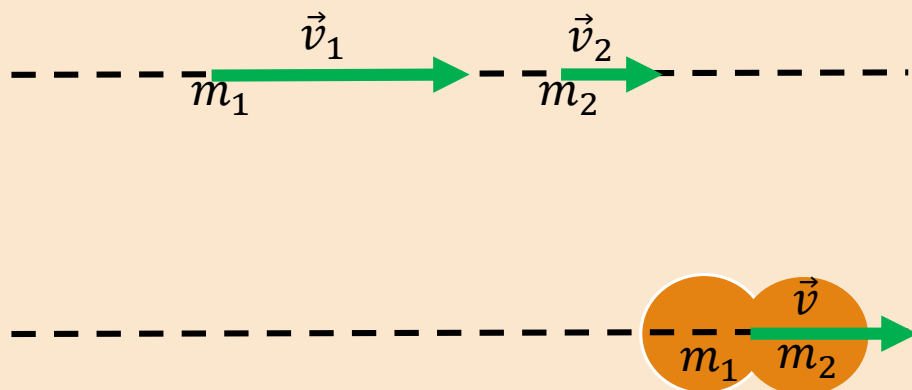


Obowiązuje zasada zachowania pędu:



# Zderzenia centralne, niesprężyste dwóch kul

Podczas zderzenia obydwie ciała odkształcają się trwale:



Zasada zachowania pędu:

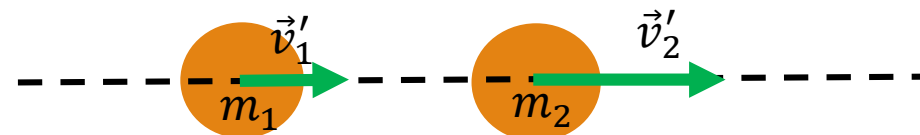
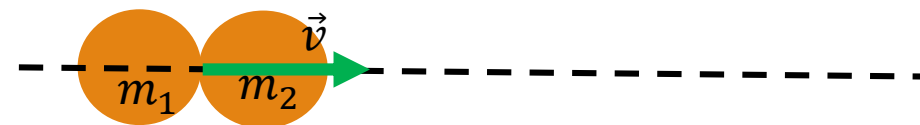
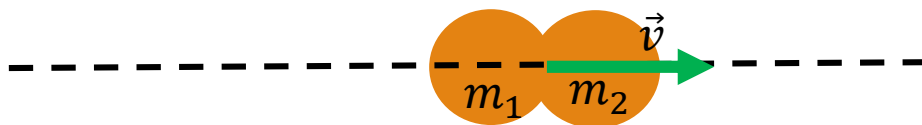
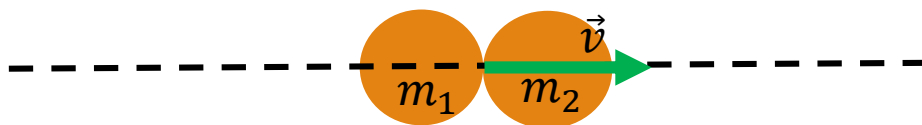
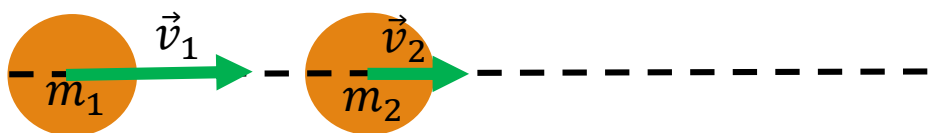
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$\underbrace{m_1 v_1 - m_1 v}_{\text{strata pędu ciała 1}} = \underbrace{m_2 v - m_2 v_2}_{\text{zysk pędu ciała 2}}$$

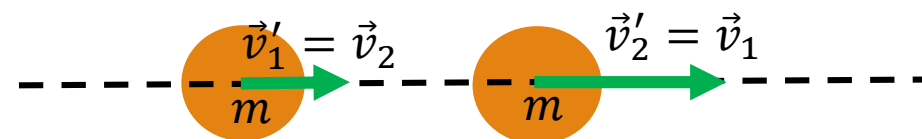
$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

# Zderzenia, centralne, sprężyste dwóch kul

Podczas zderzeń sprężystych kule odkształcają się i bardzo szybko powracają do swoich pierwotnych postaci.



Gdy  $m_1 = m_2 = m$ :





# Zderzenia, centralne, sprężyste dwóch kul

Dla  $v_1 > v_2$ :

pęd kuli o masie  $m_2$  po zderzeniu:

$$p'_2 = m_2 v'_2 = m_2 v_2 + 2(m_2 v - m_2 v_2)$$
$$v'_2 = 2v - v_2$$

pęd kuli o masie  $m_1$  po zderzeniu:

$$p'_1 = m_1 v'_1 = m_1 v_1 - 2(m_1 v_1 - m_1 v)$$
$$v'_1 = 2v - v_1$$

Dla  $m_1 = m_2$ :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$$v'_1 = v_1 + v_2 - v_1 = v_2$$

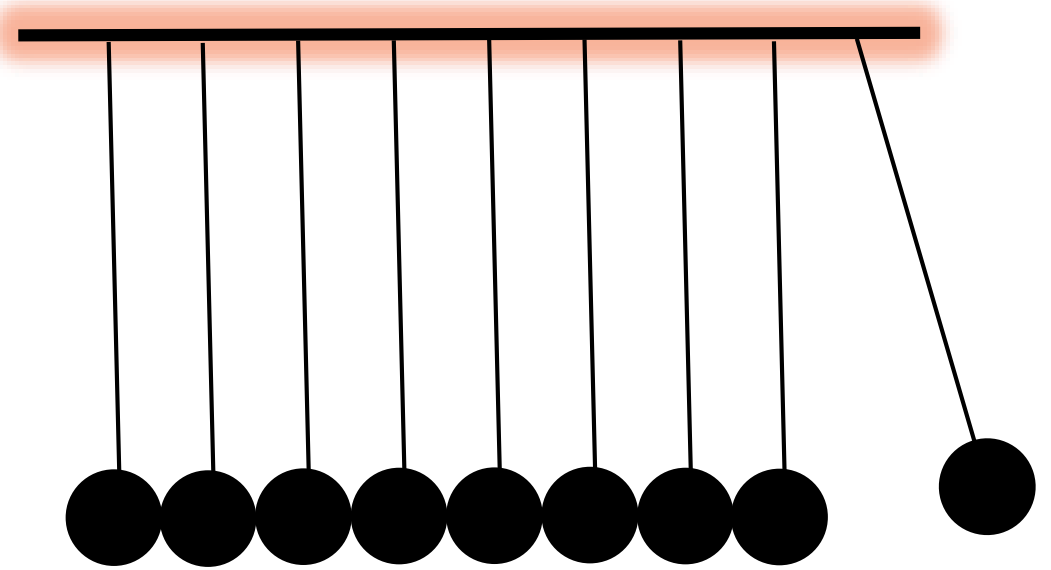
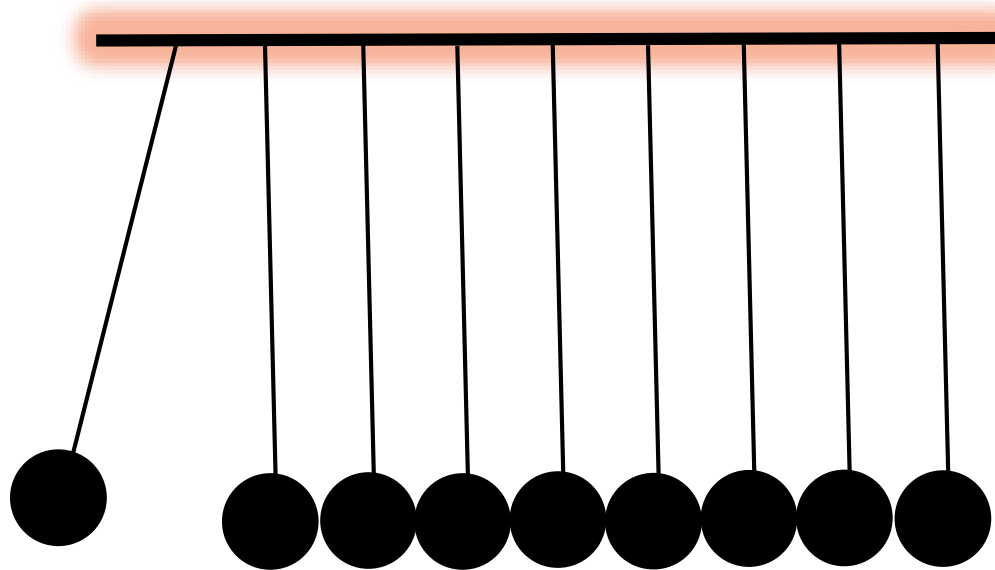
$$v'_2 = v_1 + v_2 - v_2 = v_1$$

# Wymiana prędkości

Dla  $m_1 = m_2, v_2 = 0$ :  $v = \frac{v_1}{2}$

$$v'_1 = 2v - v_1 = 0 \quad v'_2 = 2v - v_2 = v_1$$

Kula uderzona przejmuje prędkość kuli uderzającej!



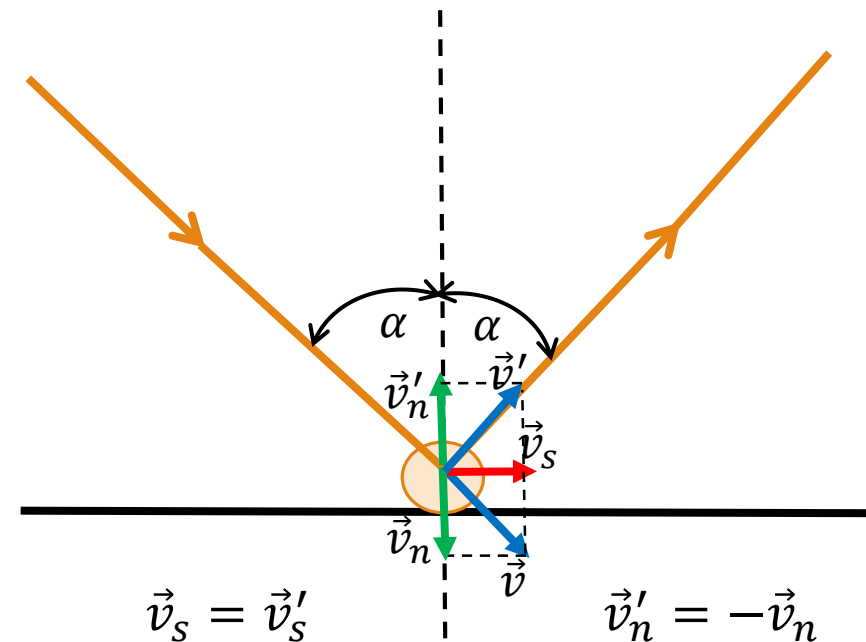
# Zderzenie sprężyste kuli ze ścianą

Kula pada z prędkością  $v_1$  prostopadle na ścianę pozostającą w spoczynku ( $v_2 = 0$ )

$$\begin{aligned}\lim_{m_2 \rightarrow \infty} v &= \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \frac{\frac{m_1}{m_2} v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = v_2 = 0\end{aligned}$$

$$v'_1 = 2v - v_1 = -v_1 \quad v'_2 = 2v - v_2 = 0$$

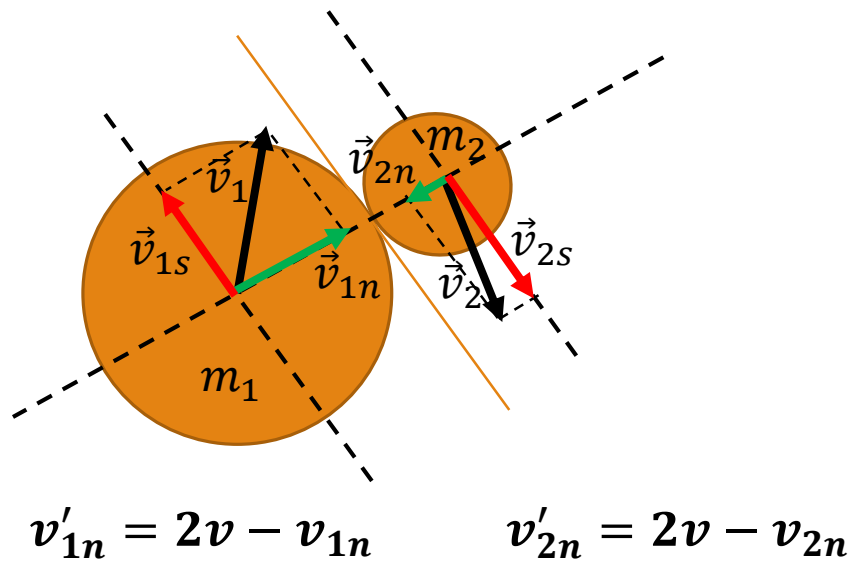
Kula pada na sprężystą ścianę pod dowolnym kątem  $\alpha$  (tarcie pomijamy)



# Zderzenia, niecentralne, sprężyste dwóch kul

Siły działające na skutek deformacji kul mają kierunek normalnej do powierzchni kul w punkcie styczności. Zmianie ulegają tylko składowe normalne prędkości obu kul

(jak w zderzeniu centralnym).



$$v = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}$$

Jeżeli założymy, że **tarcie pomiędzy kulami nie istnieje** to składowe styczne prędkości nie ulegają zmianie.

Prędkości po zderzeniu:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_{1s} + \vec{v}'_{1n} \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_{2s} + \vec{v}'_{2n}$$

Gdy  $v_2 = 0$  oraz  $m_1 = m_2$  (billard):

$$v = \frac{v_{1n}}{2} \quad \vec{v}'_{1n} = 0 \quad \vec{v}'_{2n} = v_{1n}$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_{1s} \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_{1n}$$

# Przykłady

## Zad. 1.

Równania ruchu cząstki o masie  $m$  dane są następująco:  $x = A \sin \varphi$ ,  $y = B \cos \varphi$ , ( $\varphi = \omega t$ ,  $\omega = \text{const.}$ ;  $A, B = \text{const.}$ ). Wyznaczyć prędkość, energię kinetyczną, siłę działającą na cząstkę, pracę wykonaną przez tę siłę pomiędzy punktami  $(x = A, y = 0)$  i  $(x = 0, y = B)$  i energię potencjalną cząstki.

## Zad. 2.

Wyznaczyć prędkość pocisku o masie  $m_1$  przy użyciu wahadła balistycznego (masywne ciało o masie  $m_2$  zawieszona na pręcie) wiedząc, że wysokość na jaką wzniesie się układ „pocisk+wahadło” wynosi  $h$ .

## Zad. 3.

Kula bilardowa uderza w taką samą kulę będącą w spoczynku. Wyznaczyć kąt między kierunkami ruchu kul po zderzeniu.

# Literatura

---

1. I. W. Sawieliew, KURS FIZYKI T. 1 „Mechanika”, „Fizyka cząsteczkowa”, PWN, W-wa 1987 (lub nowsze wydania).
2. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki T. 1, PWN, W-wa 1984 (lub inne wydania).
3. A. Hennel, W. Krzyżanowski, W. Szuszkiewicz, K. Wódkiewicz, Zadania i problemy z fizyki T. 1, PWN, W-wa 1974 (lub inne wydania).
4. G. Białkowski, Mechanika klasyczna, PWN, W-wa 1975 (lub inne wydania).
5. A. Piekara, Mechanika ogólna, PWN, W-wa 1973 (lub inne wydania).
6. B. M. Jaworski, A. A. Piński T. 1, PWN, W-wa 1977 (lub inne wydania).
7. E. Karaśkiewicz, Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, W-wa 1976 (lub inne wydania).