Zasady dynamiki Newtona

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

POLITECHNIKA RZESZOWSKA

I zasada dynamiki Newtona

Pierwsza zasada dynamiki Newtona (jedno z wielu sformułowań)

Dowolne ciało, na które nie działa żadna wypadkowa siła znajdować się będzie w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego prostoliniowego.

Inne sformułowanie to:

Dowolne ciało utrzymuje stałą prędkość do momentu jej zmiany przez oddziaływanie z innymi ciałami.

Inercjalny układ odniesienia

Układ odniesienia, w którym spełnione jest pierwsze prawo dynamiki Newtona.

Ziemię można w przybliżeniu traktować jako układ inercjalny.

Nieinercjalny układ odniesienia

Układ odniesienia, w którym nie jest spełnione pierwsze prawo dynamiki Newtona.

II zasada dynamiki Newtona

II zasada dynamiki (jedno z wielu sformułowań)

Wypadkowa siła $\vec{F}$ działająca na ciało o masie m nadaje mu przyspieszenie proporcjonalne do tej siły i odwrotnie proporcjonalne do masy m (stałej w mechanice newtonowskiej) ciała:

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$$

Kierunek wektora przyspieszenia jest zgodny z kierunkiem wektora siły!

II zasada dynamiki – **wersja uogólniona**, która obowiązuje dla zmiennej masy m np. w mechanice relatywistycznej

Wypadkowa siła $\vec{F}$ działająca na ciało o masie m jest równa prędkości zmiany pędu $\vec{p}$ ciała:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

Kierunek zmiany pędu $d\vec{p}$ jest zgodny z kierunkiem wywołującej tę zmianę siły $\vec{F}$.

Dla stałej masy m:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v}\overbrace{\frac{dm}{dt}}^{=0}$$

Ruch prostoliniowy

Ruch jednostajny	$v = const.$ $s = vt$ $a = 0$
Ruch jednostajnie zmienny	$v = v_0 \pm at$ $s = v_0 t \pm \frac{1}{2}at^2$ $a = const.$
Ruch niejednostajnie zmienny	$v = \int a\,dt$ $s = \int v\,dt$ $a \neq const.$

III zasada dynamiki Newtona

III zasada dynamiki (jedno z wielu sformułowań)

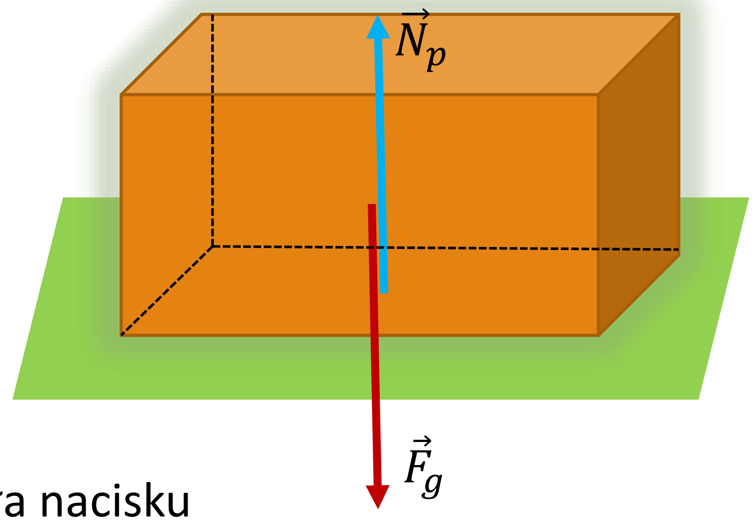
Jeżeli ciało 1 działa na ciało 2 pewną siłą $\vec{F}_{21}$ to ciało 2 działa na ciało 1 siłą $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Siły te, działając na różne ciała, nie równoważą się!

Ciało oddziałujące doznaje skutków swojego oddziaływania!

Siła nacisku

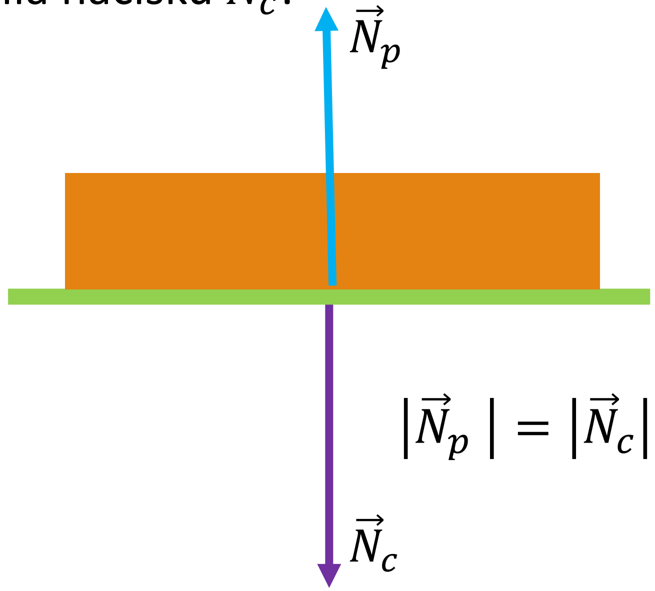
Na ciało o masie m spoczywające na poziomej powierzchni działają dwie siły:



$\vec{N}_p$ – siła nacisku

$\vec{F}_g = m\vec{g}$ – siła ciężkości

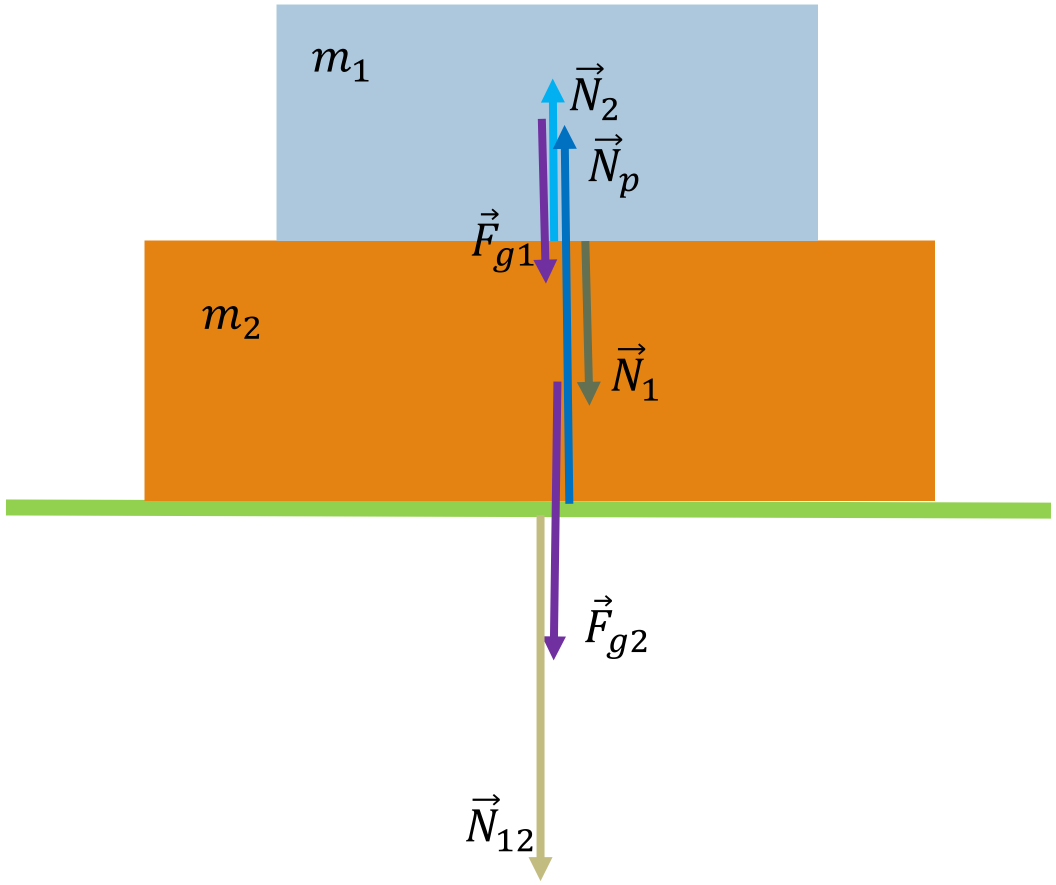
Na powierzchnię poziomą, na której spoczywa ciało działa siła nacisku $\vec{N}_c$:



$\vec{N}_p$ – siła nacisku wywierana przez podłoże na klocek

$\vec{N}_c$ – siła nacisku wywierana przez klocek na podłoże

Siła nacisku



Siły działające na ciało o masie m_1:

$$N_2 = m_1 g$$

$$F_{g1} = m_1 g$$

Siły działające na ciało o masie m_2:

$$N_1 = m_1 g$$

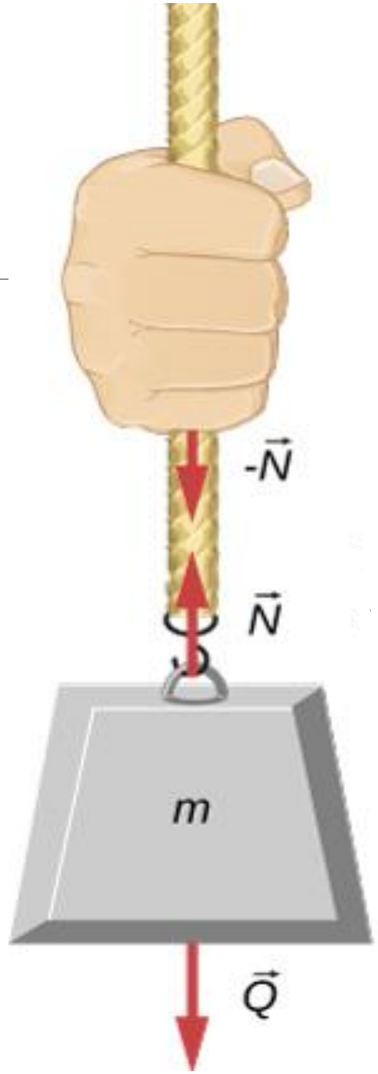
$$F_{g2} = m_2 g$$

$$N_p = (m_1 + m_2)g$$

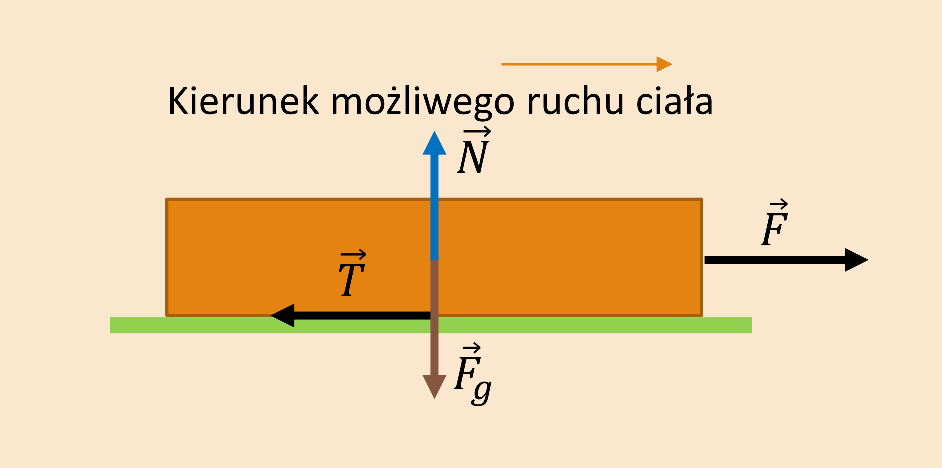
Siła działająca na podłoże:

$$N_{12} = (m_1 + m_2)g$$

Siła naciągu

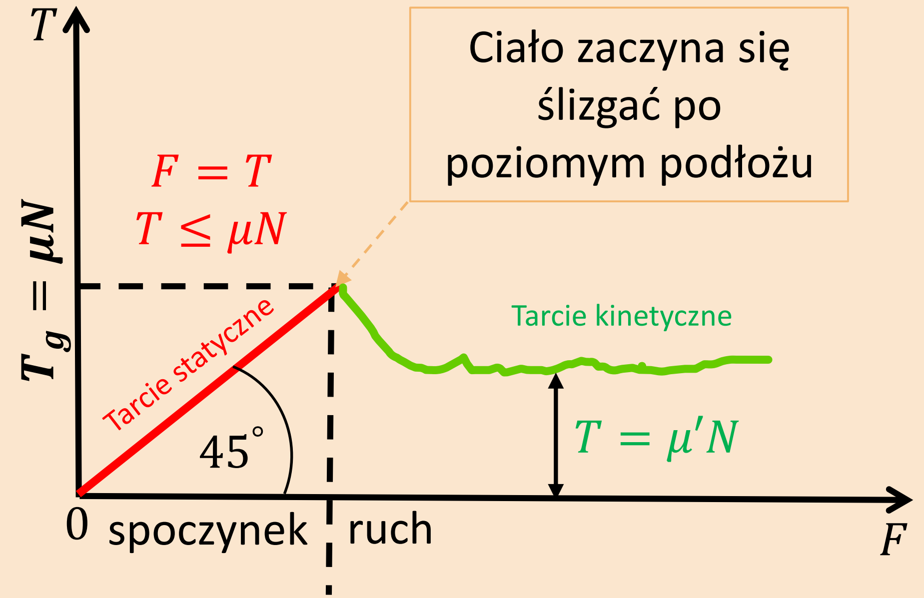


Tarcie statyczne i kinetyczne



$\vec{T}$ - siła tarcia

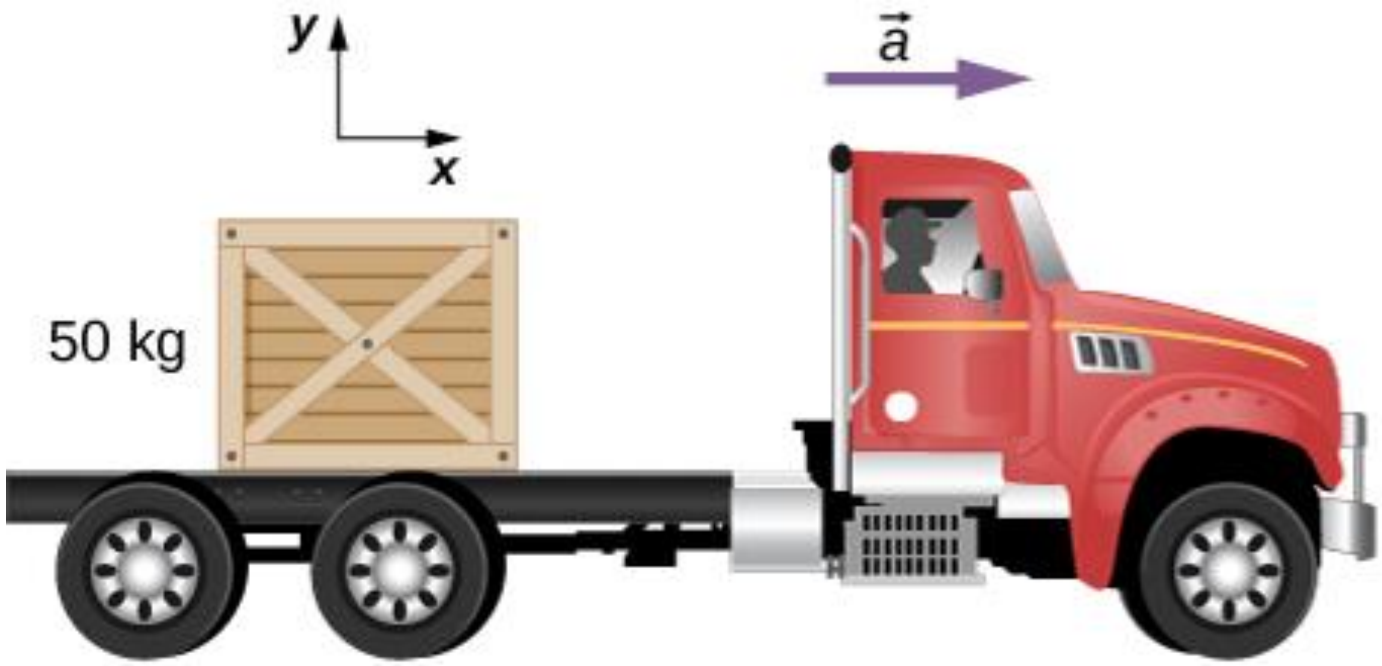
$\vec{F}$ - siła powodująca przesunięcie ciała

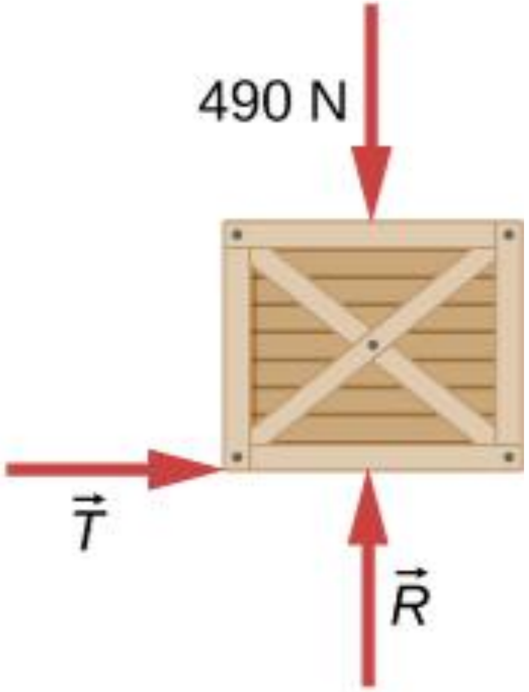


μ – współczynnik tarcia poślizgowego statycznego

μ' – współczynnik tarcia poślizgowego kinetycznego

Tarcie - przykład





Skrzynia leży na naczepie auta ciężarowego poruszającego się ruchem jednostajnie przyspieszonym.

Rozkład sił działających na skrzynię.

Prawa tarcia

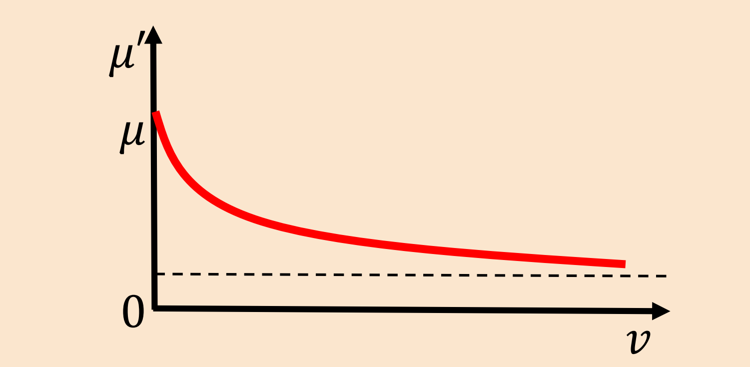
1. Siła tarcia nie zależy od wielkości stykających się ze sobą powierzchni i zależy jedynie od ich rodzaju.

2. Wartość siły tarcia dla ciała w spoczynku może zmienić się od zera do wartości granicznej proporcjonalnej do całkowitego nacisku normalnego:

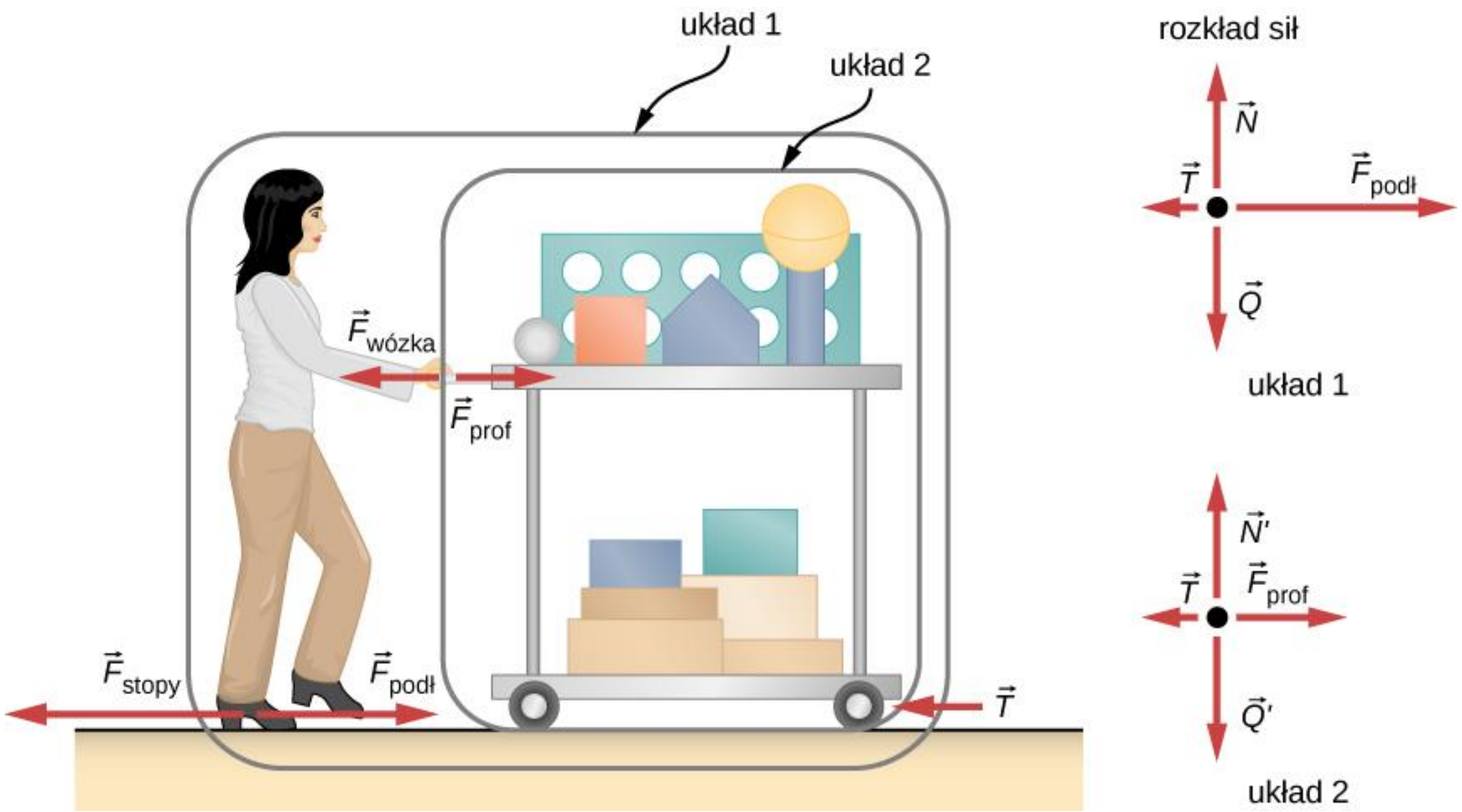
$$\boldsymbol{T \leq \mu N}$$

3. Dla ciała ślizgającego się po powierzchni, siła tarcia jest zawsze skierowana przeciwnie do kierunku ruchu i jest mniejsza od jej wartości granicznej.

$$\boldsymbol{T' = \mu' N}$$

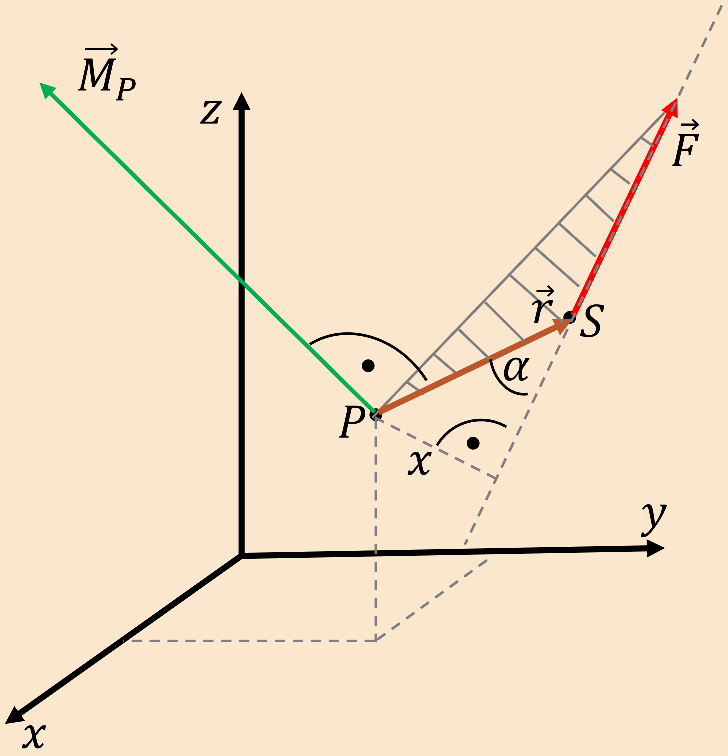


Rozkład sił - przykład



Moment siły względem punktu

Moment siły względem punktu P:

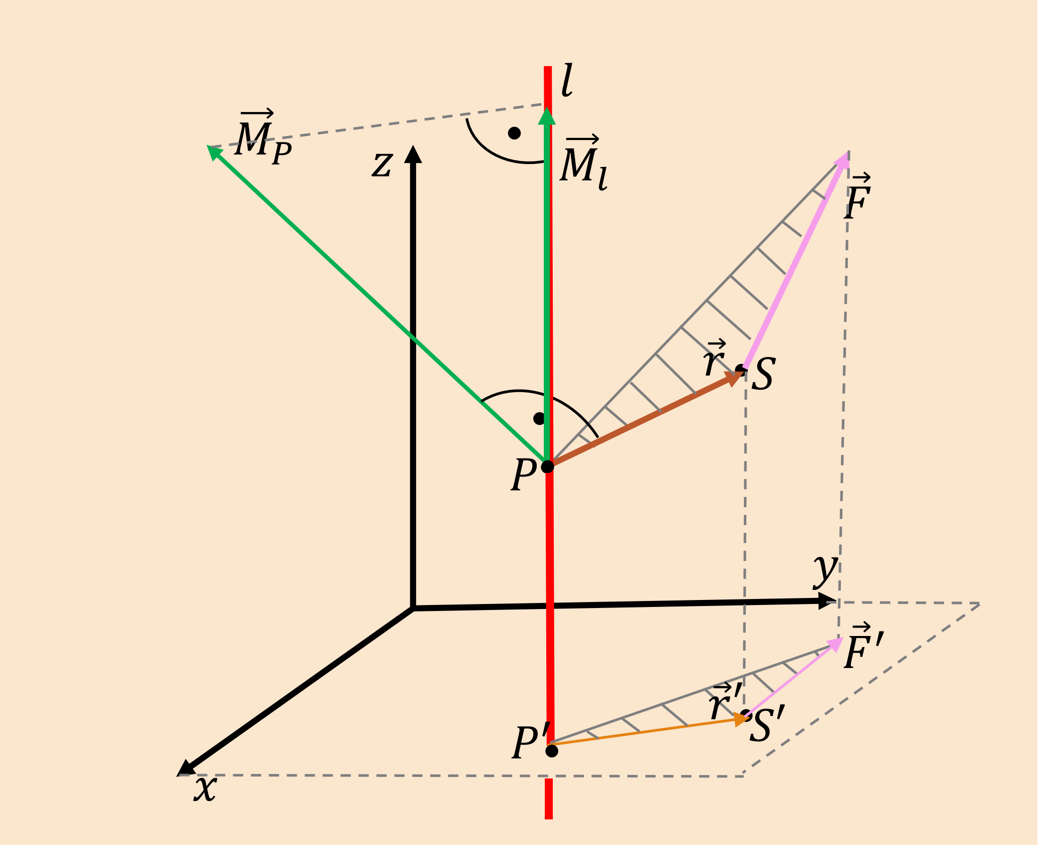


$$\vec{M}_P = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} =$$

$$\underbrace{\left(r_y F_z - r_z F_y\right)}_{M_{Px}} \vec{\imath} + \underbrace{\left(r_z F_x - r_x F_z\right)}_{M_{Py}} \vec{\jmath} + \underbrace{\left(r_x F_y - r_y F_x\right)}_{M_{Pz}} \vec{k}$$

$$\left|\vec{M}_P\right| \equiv M_P = rF sin\alpha = Fx$$

Moment siły względem osi



Moment siły względem osi, jest równy rzutowi wektora momentu siły względem dowolnego punktu osi na tę oś.

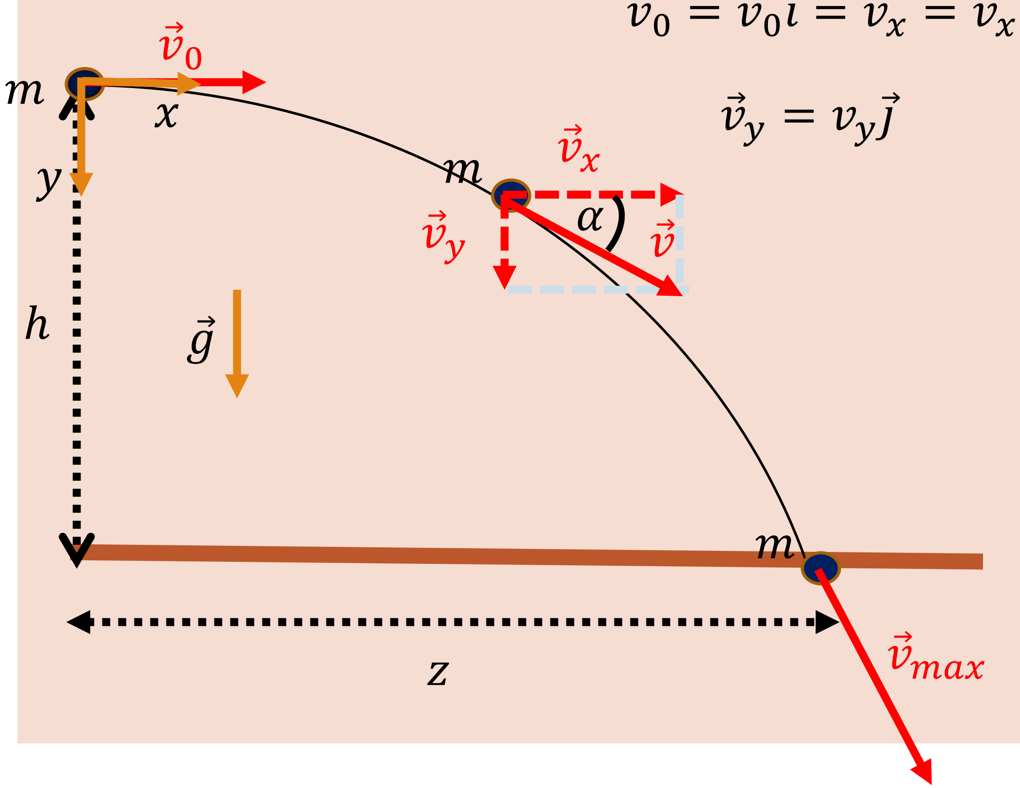
Momentem siły $\vec{F}$ względem osi l nazywamy moment siły $\vec{F}'$ względem punktu P'.

Współrzędne M_x, M_y, M_z wektora $\vec{M}_0$ (momentu siły $\vec{F}$ względem początku układu współrzędnych) nazywają się momentami siły $\vec{F}$ względem osi odpowiednio: x, y, z.


$\vec{F}$
$\vec{r}$

Rzut poziomy

bez uwzględnienia oporu powietrza



$\vec{v}_0 = v_0\vec{i} = \vec{v}_x = v_x\vec{i}$

$\vec{v}_y = v_y\vec{j}$

$$\frac{dv_y}{dt} = g \qquad \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$v_x = v_0 = const. \quad v_y(t) = gt \quad y(t) = \frac{gt^2}{2}$$

$$y(t_c) = h$$

$$v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2} \qquad (v_y)_{max} = \sqrt{2gh}$$

$$v_{max} = \sqrt{v_0{}^2 + 2gh}$$

$$z = v_0 t_c = v_0\sqrt{2h/g}$$

Opór powietrza: $\vec{F}_o = -\kappa\vec{v}$

$$m\ddot{r} = P(v) \rightarrow \int_{v_0}^{v} \frac{dv}{P(v)} = \frac{1}{m}\int_0^t dt$$

$$\boldsymbol{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1}$$

$$\boldsymbol{m\frac{dv_y}{dt} = mg - \kappa v_y}$$

$$v_y(t) = \frac{m}{\kappa}\left(g - e^{-\frac{\kappa}{m}t}e^{C_1}\right)$$

$$v_y(0) = 0 \quad e^{C_1} = \mathrm{g} \rightarrow \boldsymbol{v_y(t) = \frac{mg}{\kappa}\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right)} \rightarrow \boldsymbol{\frac{mg}{k}}$$

PRĘDKOŚĆ GRANICZNA !!!

$$y(t) = \int v_y(t)dt = \frac{gm}{\kappa}t + \frac{gm^2}{\kappa^2}e^{-\frac{\kappa}{m}t} + C_2$$

$$y(t=0) = 0 \qquad C_2 = -\frac{gm^2}{\kappa^2}$$

$$\boldsymbol{m\frac{dv_x}{dt} = -\kappa v_x}$$

$$v_x(t) = e^{-\frac{\kappa}{m}t}e^{C_1}$$

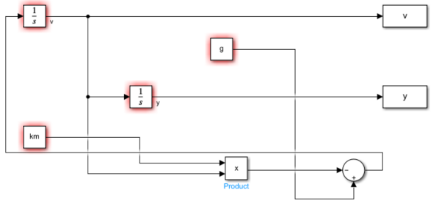
$$v_x(0) = v_0 \qquad e^{C_1} = v_0$$

$$v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\kappa}{m}t} \rightarrow 0$$

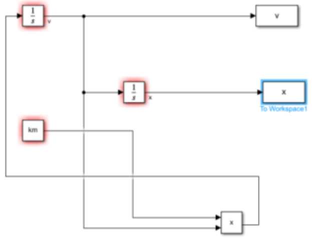
$$x(t) = \int v_x(t)dt = -\frac{mv_0}{\kappa}e^{-\frac{\kappa}{m}t} + C_2$$

$$x(t=0) = 0 \qquad C_2 = \frac{mv_0}{\kappa}$$

$$x(t) = \frac{mv_0}{\kappa}\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right)$$



MATLAB - Simulink

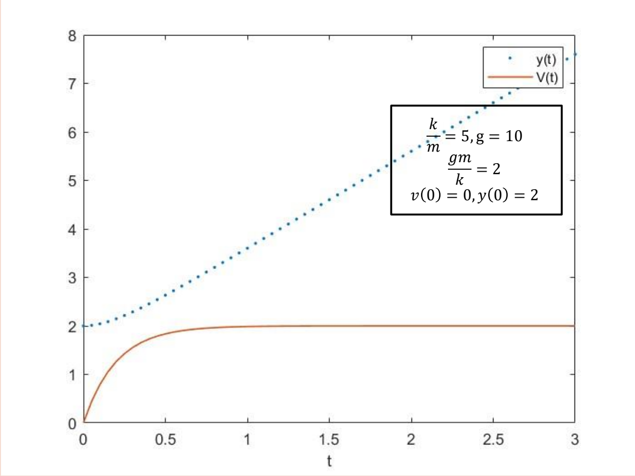


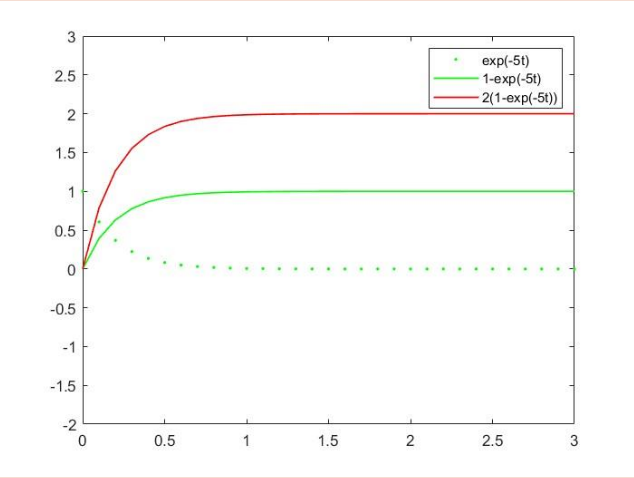
$$m\frac{dv_y}{dt} = mg - \kappa v_y$$

$$v_y(t) = \frac{mg}{\kappa}\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right) \to \frac{mg}{k}$$

$$y(t) = \int v_y(t)dt = \frac{gm}{\kappa}t + \frac{gm^2}{\kappa^2}e^{-\frac{\kappa}{m}t} - \frac{gm^2}{\kappa^2} + 2$$

$$C_2 = 2 - \frac{gm^2}{\kappa^2}$$



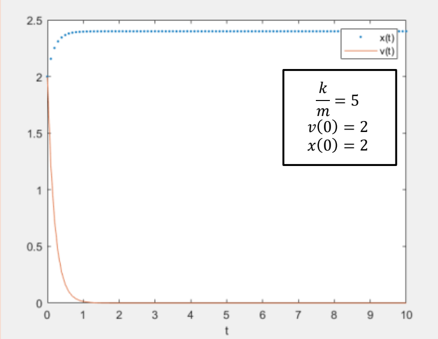


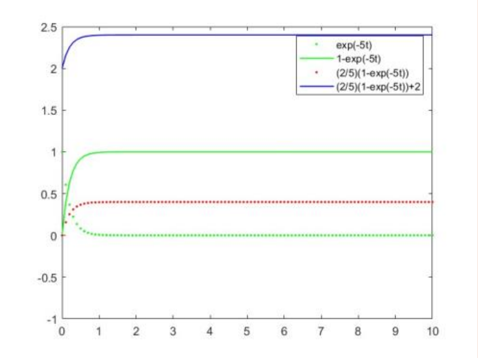
$$m\frac{dv_x}{dt} = -\kappa v_x$$

$$v_x(t) = v_0 e^{-\frac{\kappa}{m}t} \to 0$$

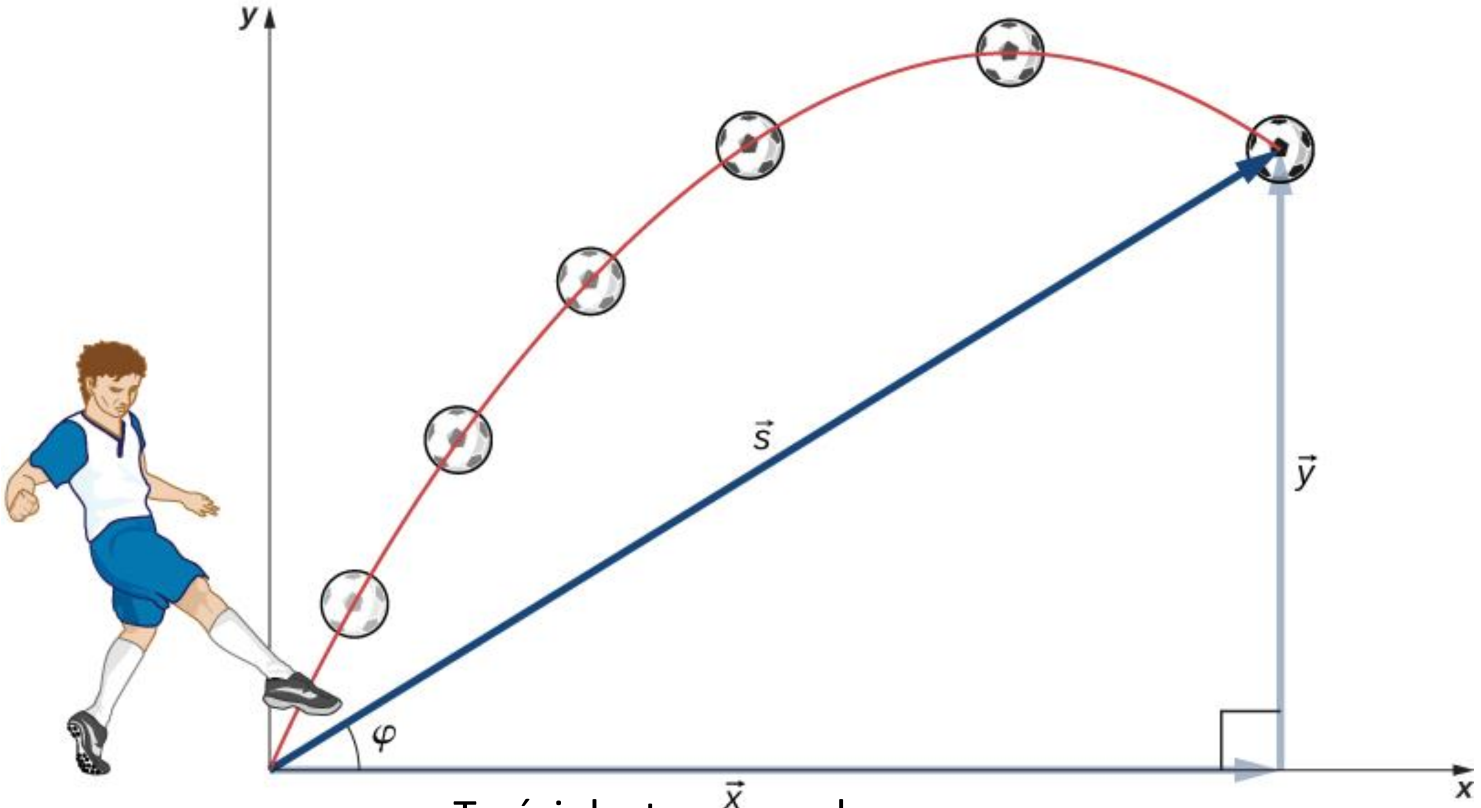
$$x(t) = \int v_x(t)dt = \frac{mv_0}{\kappa}\left(1 - e^{-\frac{\kappa}{m}t}\right) + x_0$$

$$C_2 = x_0 + \frac{mv_0}{\kappa} = 2 + \frac{2m}{\kappa}$$





Rzut ukośny



Treści dostępne za darmo na:
https://openstax. org/books/fizyka-dla-szkół-wyższych-tom-1/pages/7-1-praca

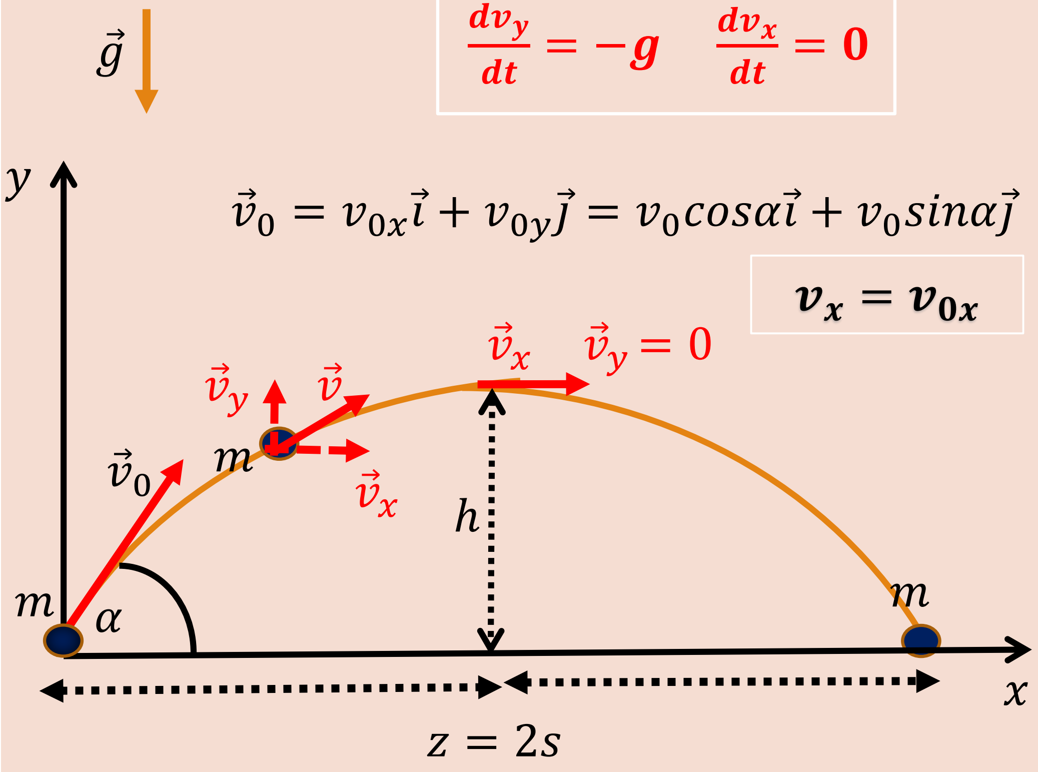
Rzut ukośny

bez uwzględnienia oporu powietrza

$$\frac{dv_y}{dt} = -g \qquad \frac{dv_x}{dt} = 0$$

$$\vec{v}_0 = v_{0x}\vec{\imath} + v_{0y}\vec{\jmath} = v_0 cos\alpha\vec{\imath} + v_0 sin\alpha\vec{\jmath}$$

$$\boldsymbol{v_x = v_{0x}}$$



Dla maksymalnej wysokości ciała

$$v_y = v_{0y} - gt_y = 0, \quad t_y = \frac{v_0 sin\alpha}{g}, \quad y(t) = v_0 t sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$y(t_y) = h$$

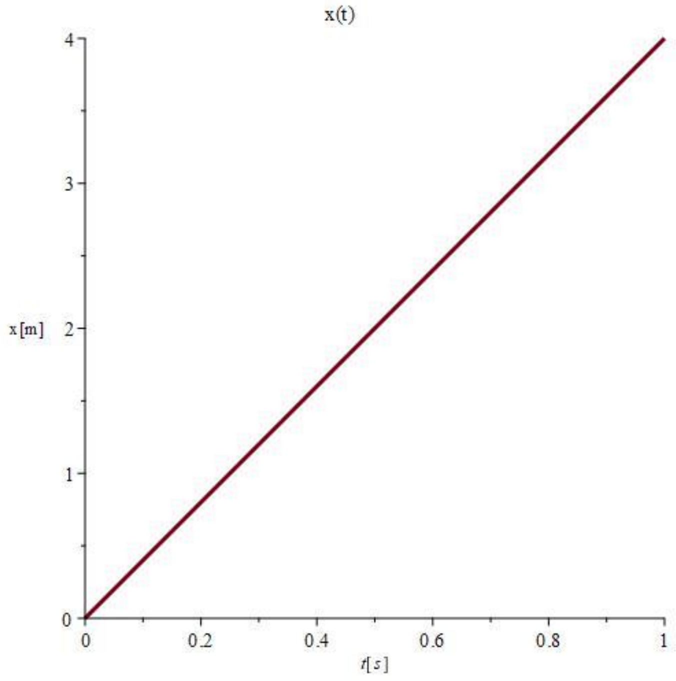
$$h = \frac{{v_0}^2 sin^2\alpha}{2g}$$

$$s = v_0 t_y cos\alpha = \frac{{v_0}^2 cos\alpha sin\alpha}{g}$$

$$z = 2\frac{{v_0}^2 cos\alpha sin\alpha}{g}$$

Równania ruchu

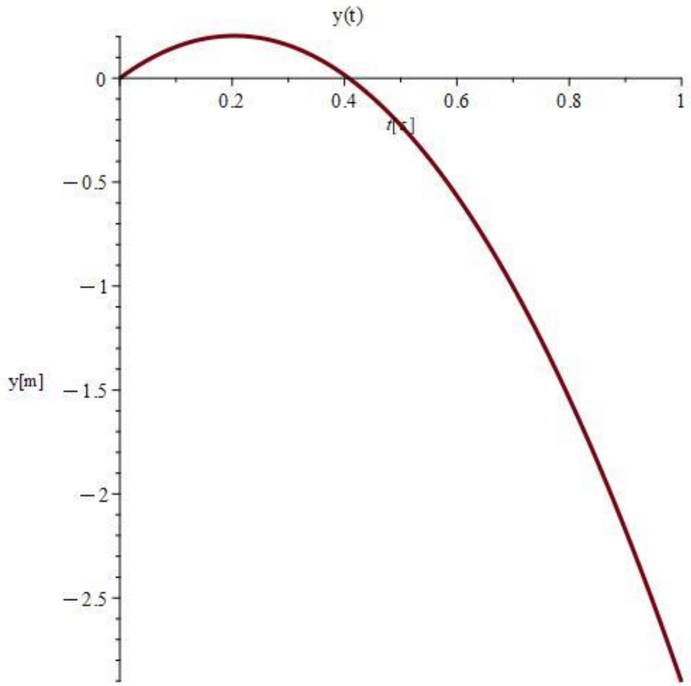
$$\alpha = \frac{\pi}{6} \qquad v_0 = 4m/s$$



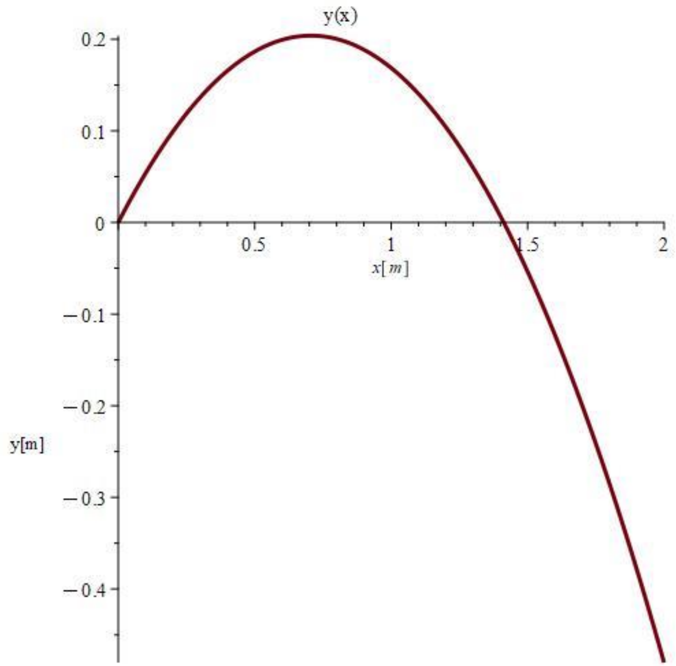
$$y(t) = v_0 t sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$x(t) = v_0 t cos\alpha$$

$$t_y = 0,2s$$



Równanie toru



$$\alpha = \frac{\pi}{6} \quad v_0 = 4m/s \quad \rightarrow \quad h = 0{,}2m \quad x_z = 1.41m$$

$$y(t) = v_0 t sin\alpha - \frac{gt^2}{2}$$

$$x(t) = v_0 t cos\alpha \quad \rightarrow \quad t = \frac{x}{v_0 cos\alpha}$$

$$y(x) = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2(v_0)^2 cos^2\alpha}$$

$$\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow s = \frac{{v_0}^2 cos\alpha sin\alpha}{g} \rightarrow y(s) = h = \frac{{v_0}^2 sin^2\alpha}{2g}$$

$$y(x) = xtg\alpha - \frac{gx^2}{2(v_0)^2 cos^2\alpha} = 0$$

$$\Delta = tg^2\alpha$$

$$x_z = \begin{cases} \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{(-tg\alpha + tg\alpha)(v_0)^2 cos^2\alpha}{g} = 0 \\ \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\dfrac{(-tg\alpha - tg\alpha)(v_0)^2 cos^2\alpha}{g} = \dfrac{2{v_0}^2 cos\alpha sin\alpha}{g} = 2s \end{cases}$$

Siła sprężysta

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\boldsymbol{k}\vec{\boldsymbol{x}}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$$x = Acos\varphi = Acos\underbrace{\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right)}_{\varphi}$$

$$\boldsymbol{v} = \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{dt}} \equiv \dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{Asin\varphi} \quad \frac{\boldsymbol{d\varphi}}{\underbrace{\boldsymbol{dt}}_{\equiv\dot{\varphi}=\sqrt{\frac{k}{m}}}}$$

$$\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{A\omega sin\varphi}$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{d^2x}}{\boldsymbol{dt^2}} \equiv \ddot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{A\omega^2 cos\varphi} = -\boldsymbol{x\omega^2}$$

Przykłady

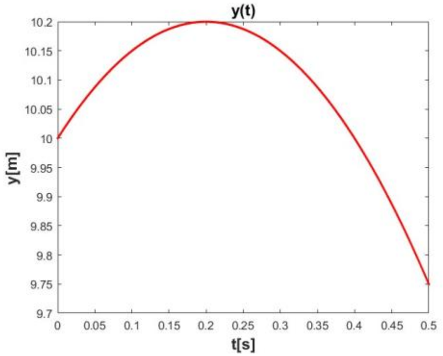
Zad. 1. Obliczyć czas, po którym ciało o masie m i prędkości początkowej v_0 poruszające się do góry po równi pochyłej o kącie nachylenia α do poziomu osiągnie prędkość równą $\frac{v_0}{10}$.

Zad. 2. Po wyłączeniu silnika okręt zmniejsza swoją prędkość v na skutek działania siły oporu $F = -kv$. Wiedząc, że prędkość początkowa okrętu wynosiła $20\frac{m}{s}$, a po czasie $\mathrm{t} = 10\ s$ zmalała do wartości $5\frac{m}{s}$, obliczyć po jakim czasie prędkość ta zmaleje do wartości $2\frac{m}{s}$.

Zad. 3. Wyznaczyć moment siły $\vec{F} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k} \equiv [1,1,1]$ zaczepionej w punkcie A o współrzędnych

$(x = 0, y = 0, z = 1) \equiv (0,0,1)$ względem początku układu współrzędnych, punktu B o współrzędnych $(0,1,1)$, względem punktu C o współrzędnych (1,3,4), oraz względem osi x.

Zad. 4. Jaką pracę należy wykonać, aby rozciągnąć sprężynę o długość l? Obliczenia przedstawić graficznie korzystając z geometrycznej interpretacji całki.



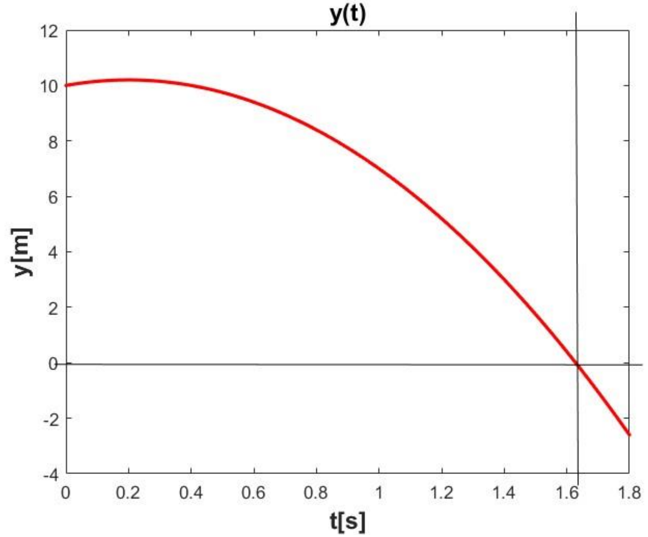
Przykłady

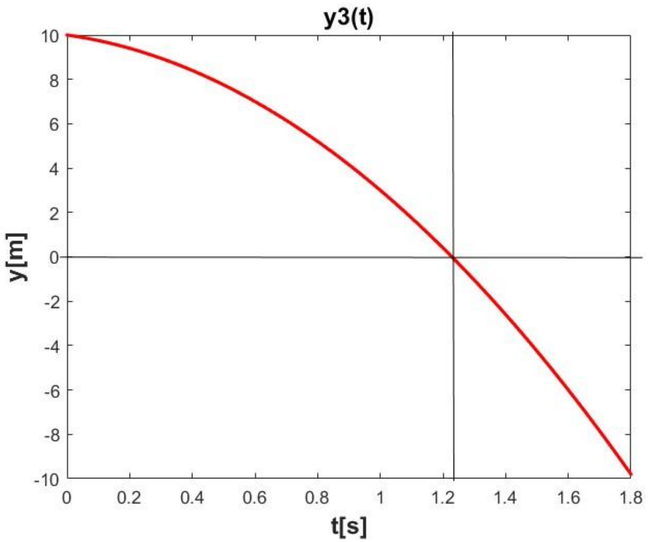
Zad. 5. Ze stopnia o wysokości $h = 10\ m$ rzucono kamieniem z prędkością początkową $v_0 = 4\frac{m}{s}$ skierowaną pod kątem $\alpha = 30^{\circ}$do poziomu. Czy doleci on do basenu oddalonego od podstawy stopnia o $l = 15\ m$?

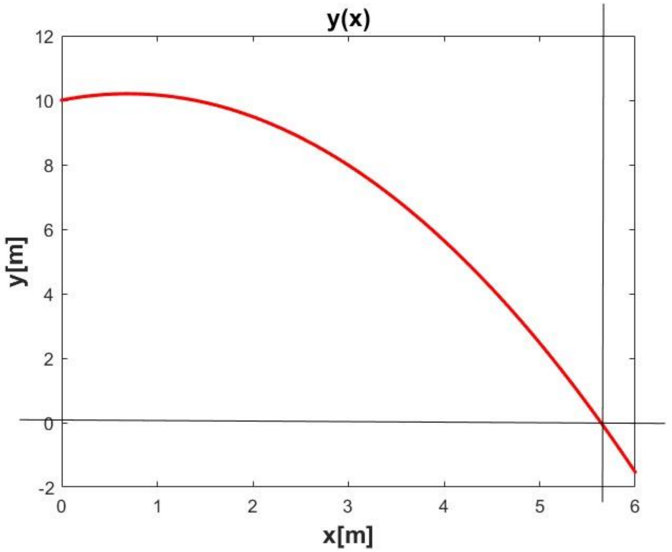
$$\boldsymbol{y(t) = h + v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}}$$

$$\boldsymbol{y(t) = h - v_{0y}t - \frac{gt^2}{2}}$$

$$\boldsymbol{y(x) = h + xtg(\alpha) - \frac{gx^2}{2v_0^2cos^2\alpha}}$$







Literatura

1. I. W. Sawieliew, KURS FIZYKI T. 1 „Mechanika”, „Fizyka cząsteczkowa”, PWN, W-wa 1987 (lub nowsze wydania).

2. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki T. 1, PWN, W-wa 1984 (lub inne wydania).

3. A. Hennel, W. Krzyżanowski, W. Szuszkiewicz, K. Wódkiewicz, Zadania i problemy z fizyki T. 1, PWN, W-wa 1974 (lub inne wydania).

4. B. M. Jaworski, A. A. Piński, Elementy fizyki Tom 1 i 2, PWN, W-wa 1976 (lub nowsze wydania).

5. D. Halliday, R. Resnick, J. Walker, Podstawy fizyki 1, PWN, W-wa 2011 (lub inne wydania).

6. W. Żakowski, W. Leksiński, Matematyka IV, W N-T, W-wa 1995 (lub inne wydania).