

Zasady zachowania energii i pędu. Zderzenia.

DR DOROTA JAKUBCZYK

KATEDRA FIZYKI I INŻYNIERII MEDYCZNEJ

WYDZIAŁ MATEMATYKI I FIZYKI STOSOWANEJ

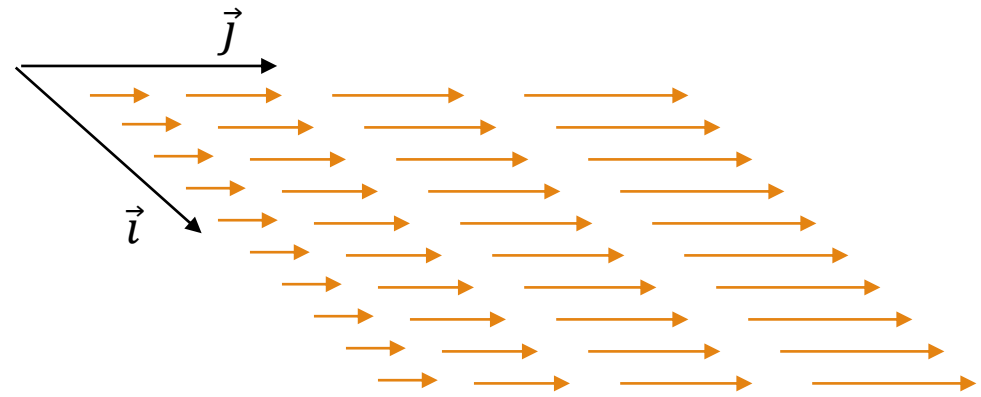
POLITECHNIKA RZESZOWSKA

Gradient

Gradient wielkości skalarnej oznacza spadek lub narastanie tej wielkości w określonym kierunku!

$$\nabla f = \vec{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial f}{\partial z}$$

$$df = \text{grad} f \cdot \overrightarrow{dr}$$



$$\nabla f = \vec{j} \frac{\partial f}{\partial y}$$

Dywergencja – przestrzenna gęstość strumienia pola wektorowego

$$\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$$

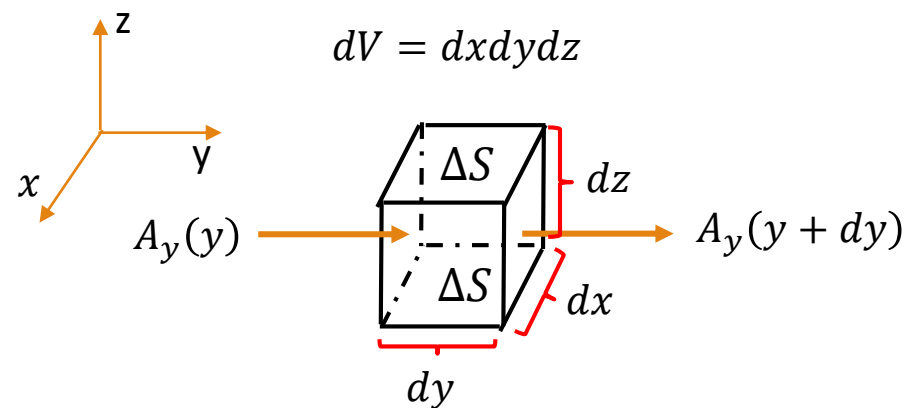
$$\text{div}\vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} dx = A_x(x + dx) - A_x(x)$$

$$\frac{\partial A_y}{\partial y} dy = A_y(y + dy) - A_y(y)$$

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} dz = A_z(z + dz) - A_z(z)$$

Elementarny strumień $d\Phi_y$ z powierzchni prostopadłej do osi y:



$$d\Phi_y = [A_y(y + dy) - A_y(y)] dz dx = \frac{\partial A_y}{\partial y} dxdydz = \frac{\partial A_y}{\partial y} dV$$

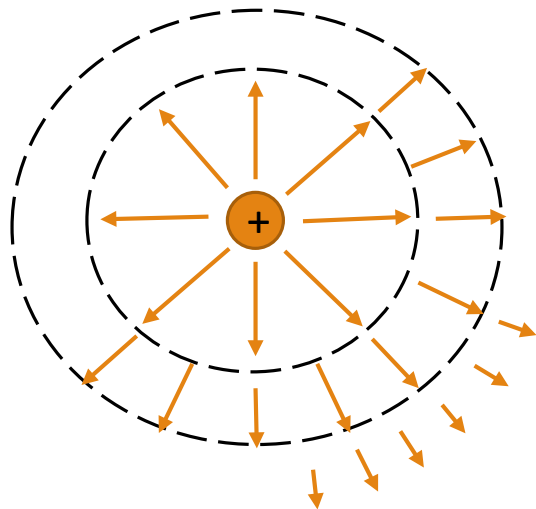
Całkowity elementarny strumień $d\Phi$ wynosi:

$$d\Phi = d\Phi_x + d\Phi_y + d\Phi_z = \text{div}\vec{A} dV$$

$$\text{div}\vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} d\Phi$$

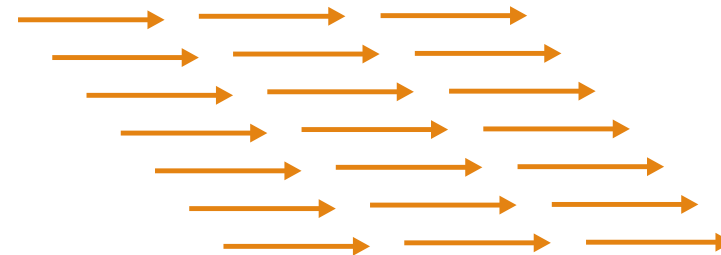
Dywergencja - zastosowania

Dywergencja indukcji pola elektrycznego:

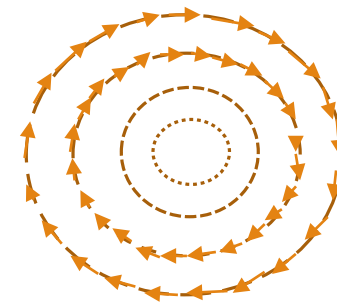


$$\operatorname{div} \vec{D} \neq 0$$

Pola bezźródłowe:



Dywergencja indukcji pola magnetycznego:



$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Rotacja wektora

$$\vec{A} = A_x(x, y, z)\vec{i} + A_y(x, y, z)\vec{j} + A_z(x, y, z)\vec{k}$$

$$\mathbf{rot}\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\vec{k} \equiv$$

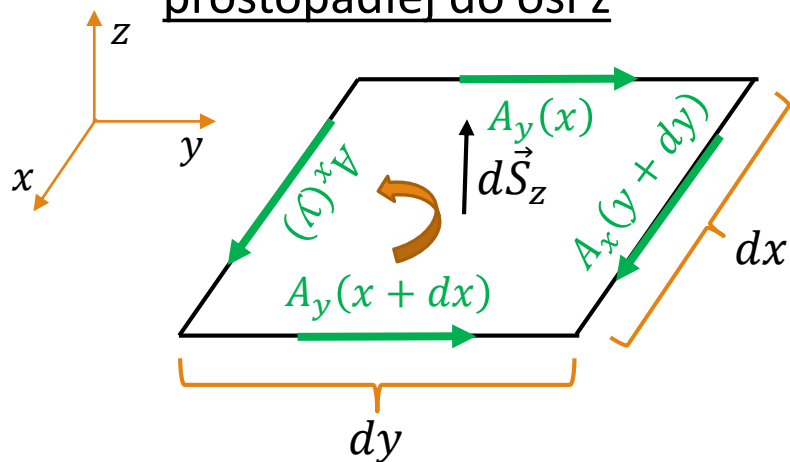
$$\equiv \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

Rotacja wektora

Całkowita elementarna cyrkulacja dO wynosi:

$$dO = \int \vec{A} \cdot d\vec{r} = dO_x + dO_y + dO_z$$

Elementarna cyrkulacja dO_z w płaszczyźnie prostopadłej do osi z



$$A_x(y + dy) = A_x(y) + \frac{\partial A_x}{\partial y} dy$$

$$dO_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dxdy$$

$$dO_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dydz$$

$$dO_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dzdx$$

$$dO = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dzdx + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dxdy$$

$$dO = (\text{rot} \vec{A})_x dS_z + (\text{rot} \vec{A})_y dS_y + (\text{rot} \vec{A})_z dS_z$$

$$(\text{rot} \vec{A})_n = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} dO_n$$

Energia potencjalna

$$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}}, t)$$

Pole sił zależnych od położenia: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$

Jednorodne pole sił występuje, gdy siły są stałe co do wartości i kierunku we wszystkich punktach pola np. pole grawitacyjne w pobliżu Ziemi.

Praca siły pola:

$$W = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int F_x dx + F_y dy + F_z dz$$

Siła potencjalna zachowawcza: $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) = -\text{grad } V(\vec{r})$

Pole siły potencjalnej zachowawczej jest bezwirowe:

$$\text{rot} \vec{F} = 0$$

Praca potencjalnej zachowawczej siły pola:

$$W_{AB} = \int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_{AB} \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

$$W_{AB} = - \int_{V_A}^{V_B} dV = V_A - V_B$$

Praca siły potencjalnej zachowawczej nie zależy od drogi wzdłuż której jest wykonywana, ale tylko od położenia jej punktu początkowego i końcowego.

Energia potencjalna: $V(\vec{r}) \equiv E_p$

Zasada równoważności pracy i energii kinetycznej

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \vec{F}_w \cdot \vec{v}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \vec{F}_w \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$\int_{t_A}^{t_B} \frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2}{2} \right) dt = \int_{AB} \vec{F}_w \cdot d\vec{r}$$

$$\frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} = \int_{AB} \vec{F}_w \cdot d\vec{r}$$

Energia kinetyczna E_k punktu materialnego o masie m poruszającego się z prędkością \vec{v} :

$$E_k = \frac{mv^2}{2}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = \text{praca siły } \vec{F}_w$$

$$E_{k2} - E_{k1} = W$$

Zmiana energii kinetycznej punktu materialnego w skończonym przedziale czasu równa się pracy wykonanej w tym samym czasie przez siłę wypadkową \vec{F}_w .

Zasada zachowania energii

Praca wykonana przez wypadkową siłę \vec{F}_w :

$$\int_{AB} \vec{F}_w \cdot d\vec{r}$$

Pole siły potencjalnej zachowawczej:

$$\vec{F}(\vec{r}) = -\textit{grad } V(\vec{r})$$

$$E_{k2} - E_{k1} = - \int_{AB} \textit{grad } V(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

$$E_{k2} - E_{k1} = - \int_{V_1}^{V_2} dV$$

$$E_{k2} - E_{k1} = V_1 - V_2$$

$$E_{k2} + V_2 = E_{k1} + V_1$$

Zasada zachowania pędu

Pęd \vec{p} punktu materialnego poruszającego się prędkością \vec{v} :

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

Drugie prawo Newtona dla punktu materialnego, na które działają siły o wypadkowej \vec{F}_w :

$$\vec{F}_w = \dot{\vec{p}} = \frac{d}{dt}(m\vec{v})$$

Popęd $\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt$ sił działających na punkt materialny w przedziale czasu $\Delta t = t_2 - t_1$:

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt = m\Delta\vec{v}$$

Gdy na punkt materialny nie działają żadne siły $\vec{F}_w = 0$ (popęd jest równy 0):

$$\frac{d}{dt}(m\vec{v}) = 0$$

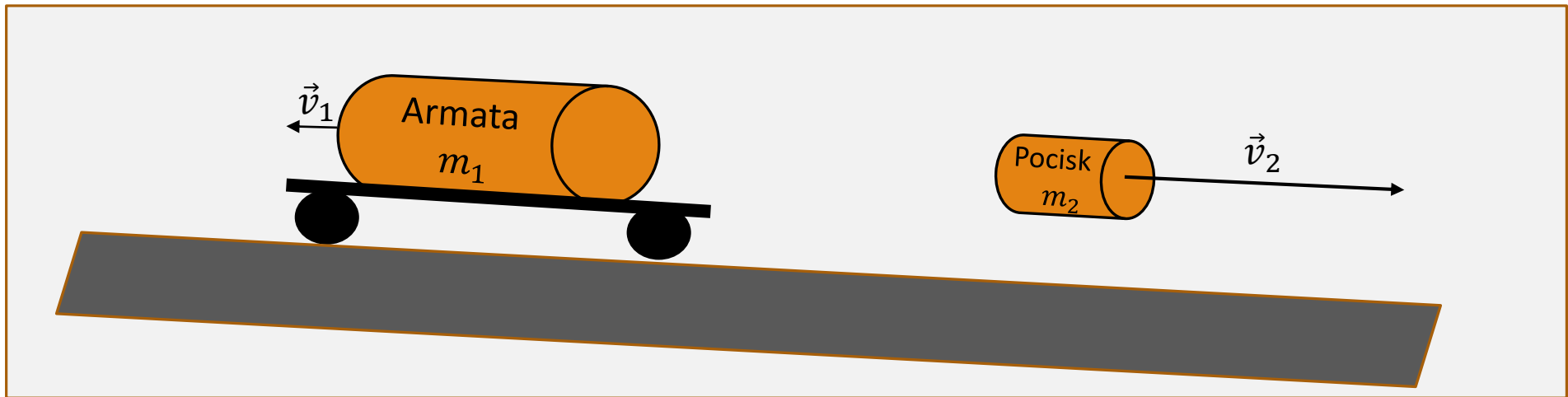


$$\vec{p} = \text{const.}$$

Prawo zachowania pędu jest konsekwencją jednorodności przestrzeni.

Zasada zachowania pędu

Spoczywający względem podłoża wózek z armatą wystrzeliwującą pocisk



Iloczyn masy i wartości wektora prędkości dla wózka z armatą jest taki sam jak dla pocisku.

Zderzenia

Zderzenia to pewne (relatywnie krótkie) zdarzenie, podczas którego biorące w nim udział ciała oddziałują na siebie siłami.

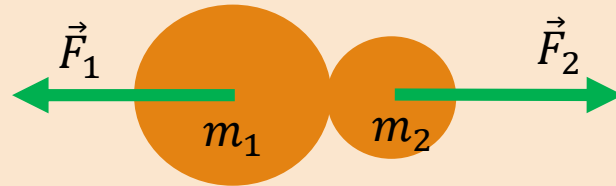
Zderzenia nie zmieniają całkowitego pędu układu!

Ze względu na geometrię zjawiska zderzenia dzielimy na **centralne** i **niecentralne**. Zderzenie dwóch ciał jest **centralne**, jeżeli oba ciała poruszają się po tej samej prostej, zarówno przed zderzeniem, jak i po zderzeniu np. zderzenie kul, których prędkości skierowane są wzdłuż linii łączącej środki tych kul. Zderzenie **niecentralne** ma miejsce wtedy, gdy zderzające się ze sobą ciała przed zderzeniem poruszają wzdłuż innych prostych niż po zderzeniu.

Zderzenia dzielimy również na **sprężyste** i **niesprężyste**. W zderzeniach **sprężystych**, całkowita energia kinetyczna jest zachowana tzn. energia kinetyczna ciał po zderzeniu jest równa całkowitej energii kinetycznej ciał przed zderzeniem. W zderzeniach **niesprężystych** energia kinetyczna nie jest zachowana, po zderzeniu ciała poruszają się razem z jednakową prędkością.

Zderzenia

Zmiany pędów cząstek pod wpływem zderzenia:



$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$$

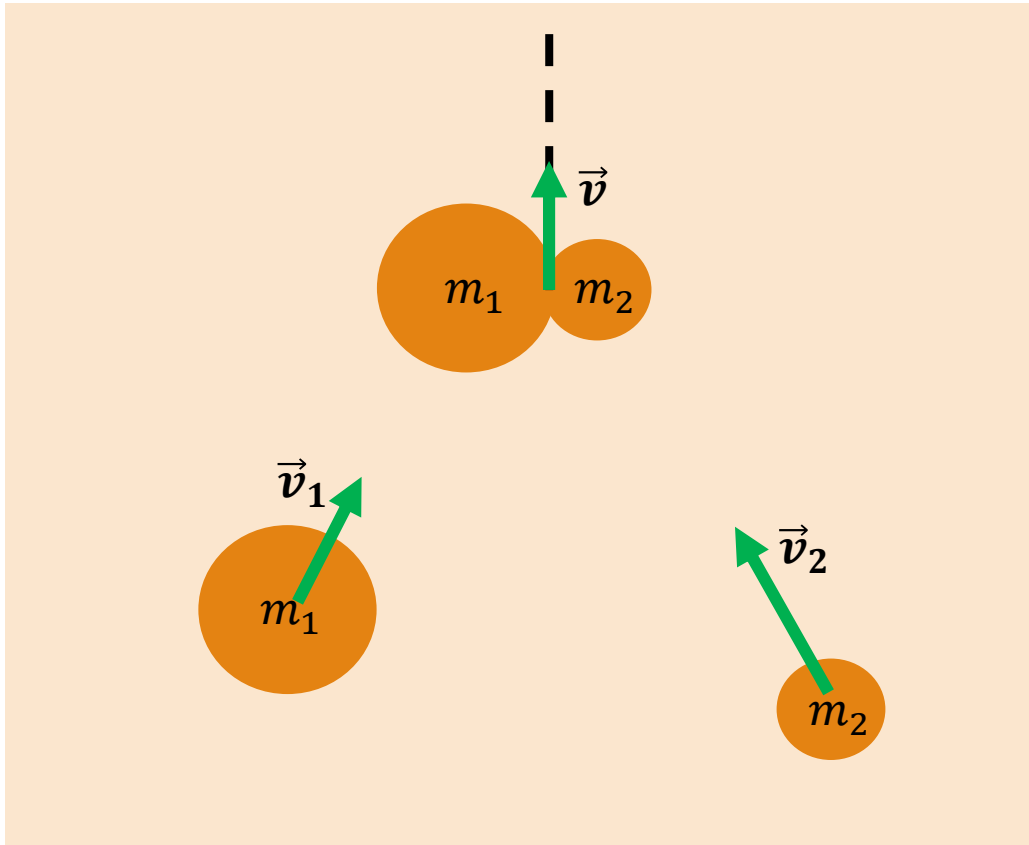
Popęd siły \vec{F}_1 : $\Delta\vec{p}_1 = \vec{F}_1\Delta t$

Popęd siły \vec{F}_2 : $\Delta\vec{p}_2 = \vec{F}_2\Delta t$

$$\Delta\vec{P} = \Delta\vec{p}_1 + \Delta\vec{p}_2 = 0$$

Podczas zderzenia obowiązuje prawo zachowania całkowitego pędu cząstek!

Zderzenia niesprężyste, niecentralne dwóch kul



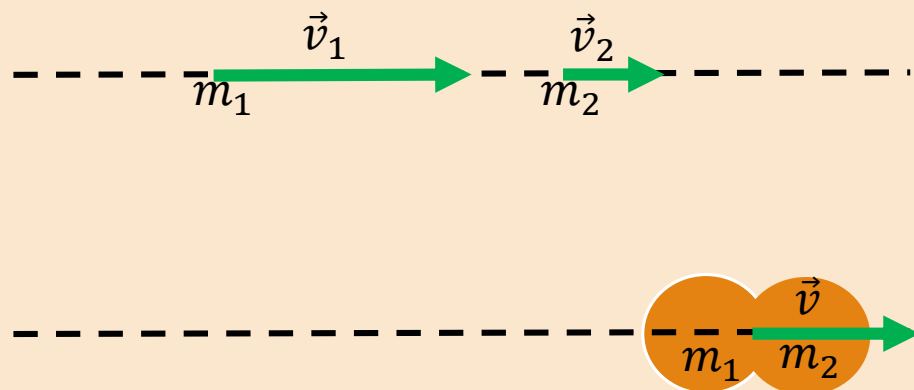
Obowiązuje zasada zachowania pędu:

$$\vec{p}_{12} = (m_1 + m_2)\vec{v}$$

A vector diagram illustrating the conservation of momentum. It shows three vectors originating from a common point: a green vector $\vec{p}_{12} = (m_1 + m_2)\vec{v}$ pointing upwards, and two black vectors $\vec{p}_1 = m_1\vec{v}_1$ and $\vec{p}_2 = m_2\vec{v}_2$ pointing to the right and left respectively. Dashed lines connect the tips of the black vectors to the tip of the green vector, forming a triangle that represents the equation $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{12}$.

Zderzenia centralne, niesprężyste dwóch kul

Podczas zderzenia obydwie ciała odkształcają się trwale:



Zasada zachowania pędu:

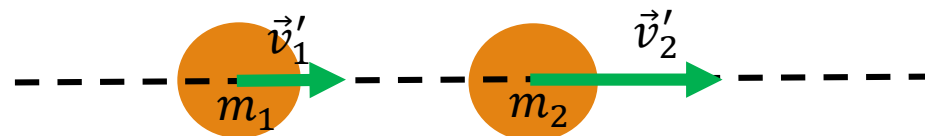
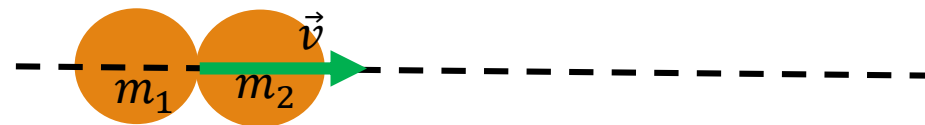
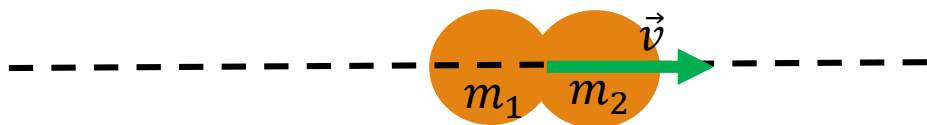
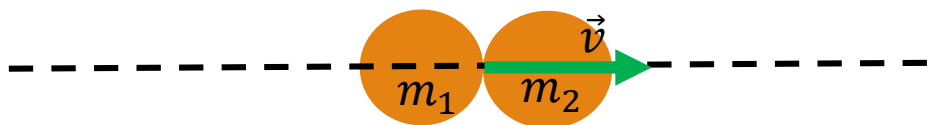
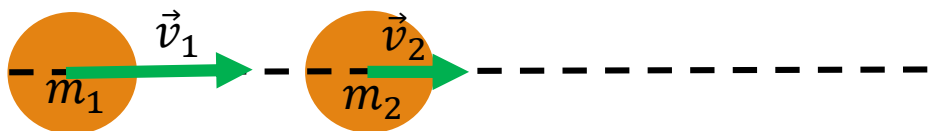
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v$$

$$\underbrace{m_1 v_1 - m_1 v}_{\text{strata pędu ciała 1}} = \underbrace{m_2 v - m_2 v_2}_{\text{zysk pędu ciała 2}}$$

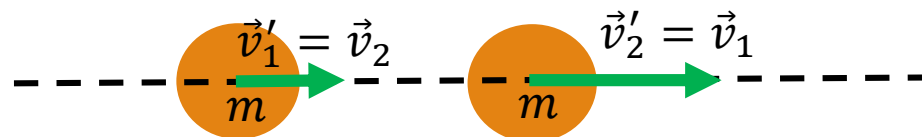
$$v = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

Zderzenia, centralne, sprężyste dwóch kul

Podczas zderzeń sprężystych kule odkształcają się i bardzo szybko powracają do swoich pierwotnych postaci.



Gdy $m_1 = m_2 = m$:



Zderzenia, centralne, sprężyste dwóch kul

Dla $v_1 > v_2$:

pęd kuli o masie m_2 po zderzeniu:

$$p'_2 = m_2 v'_2 = \mathbf{m_2 v_2 + 2(m_2 v - m_2 v_2)}$$
$$v'_2 = 2v - v_2$$

pęd kuli o masie m_1 po zderzeniu:

$$p'_1 = m_1 v'_1 = \mathbf{m_1 v_1 - 2(m_1 v_1 - m_1 v)}$$
$$v'_1 = 2v - v_1$$

Dla $m_1 = m_2$:

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

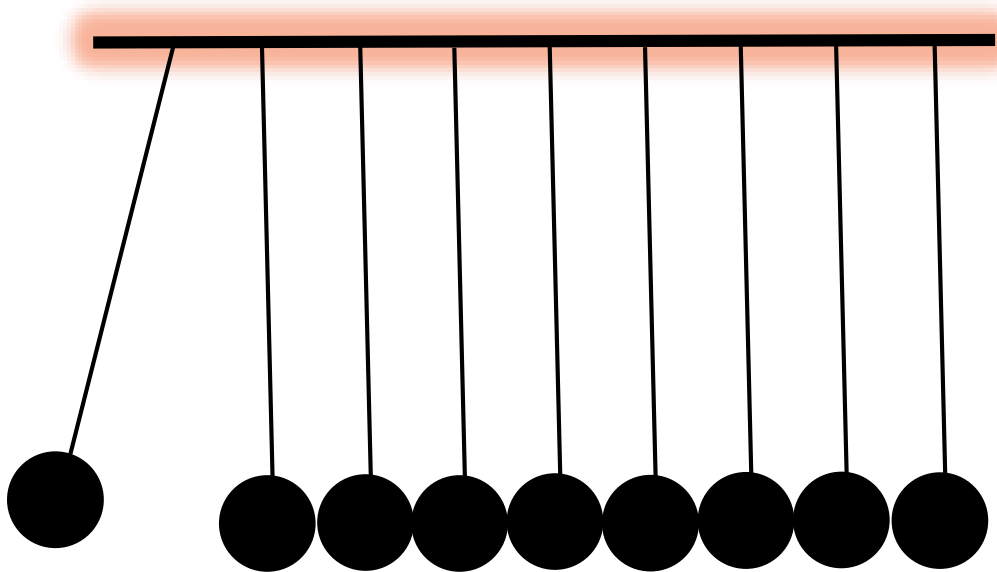
$$v'_1 = v_1 + v_2 - v_1 = v_2$$

$$v'_2 = v_1 + v_2 - v_2 = v_1$$

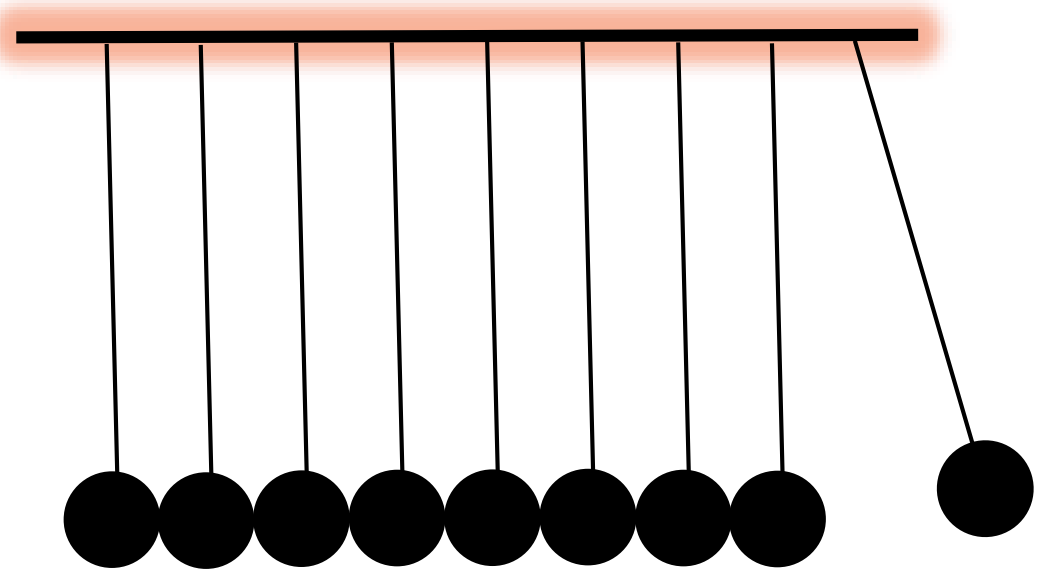
Wymiana prędkości

Dla $m_1 = m_2, v_2 = 0$: $v = \frac{v_1}{2}$

$$v'_1 = 2v - v_1 = 0 \quad v'_2 = 2v - v_2 = v_1$$



Kula uderzona przejmuje prędkość kuli uderzającej!



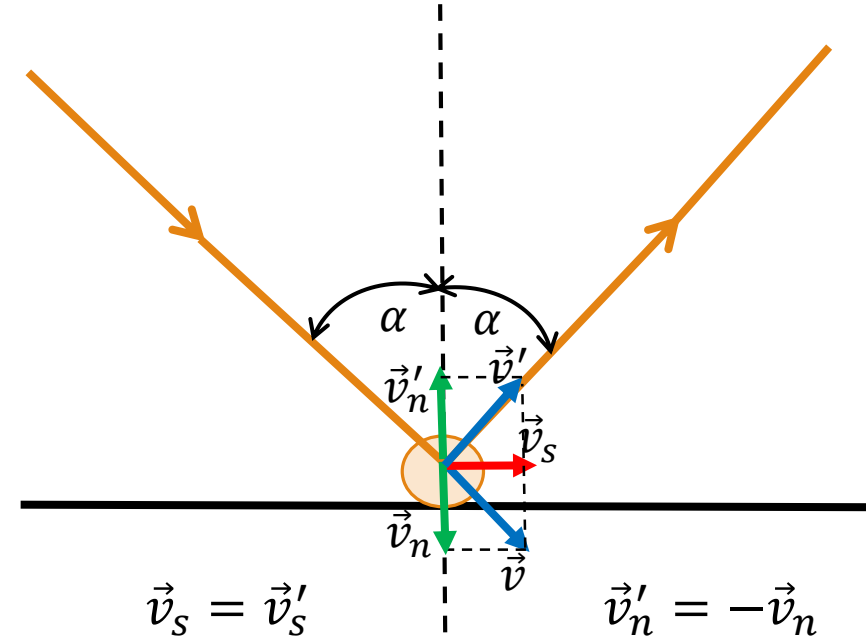
Zderzenie sprężyste kuli ze ścianą

Kula pada z prędkością v_1 prostopadle na ścianę pozostającą w spoczynku ($v_2 = 0$)

$$\begin{aligned}\lim_{m_2 \rightarrow \infty} v &= \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = \\ &= \lim_{m_2 \rightarrow \infty} \frac{\frac{m_1}{m_2} v_1 + v_2}{\frac{m_1}{m_2} + 1} = v_2 = 0\end{aligned}$$

$$v'_1 = 2v - v_1 = -v_1 \quad v'_2 = 2v - v_2 = 0$$

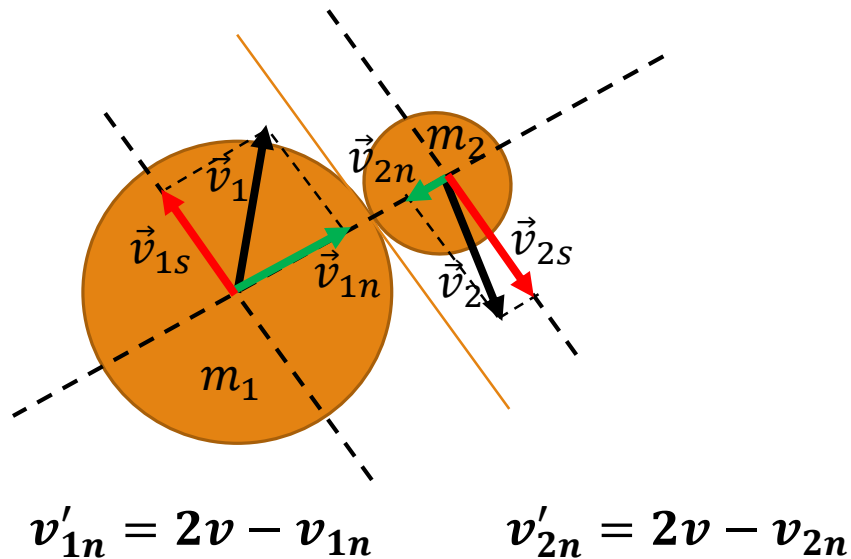
Kula pada na sprężystą ścianę pod dowolnym kątem α (tarcie pomijamy)



Zderzenia, niecentralne, sprężyste dwóch kul

Siły działające na skutek deformacji kul mają kierunek normalnej do powierzchni kul w punkcie styczności. Zmianie ulegają tylko składowe normalne prędkości obu kul

(jak w zderzeniu centralnym).



$$v = \frac{m_1 v_{1n} + m_2 v_{2n}}{m_1 + m_2}$$

Jeżeli założymy, że **tarcie pomiędzy kulami nie istnieje** to składowe styczne prędkości nie ulegają zmianie.

Prędkości po zderzeniu:

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_{1s} + \vec{v}'_{1n} \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_{2s} + \vec{v}'_{2n}$$

Gdy $v_2 = 0$ oraz $m_1 = m_2$ (billard):

$$v = \frac{v_{1n}}{2} \quad \vec{v}'_{1n} = 0 \quad \vec{v}'_{2n} = v_{1n}$$

$$\vec{v}'_1 = \vec{v}_{1s} \quad \vec{v}'_2 = \vec{v}_{1n}$$

Przykłady

Zad. 1.

Równania ruchu cząstki o masie m dane są następująco: $x = A\sin\varphi$, $y = B\cos\varphi$, ($\varphi = \omega t$, $\omega = \text{const.}$; $A, B = \text{const.}$).

- 1) Wyznaczyć prędkość, energię kinetyczną, siłę działającą na cząstkę, pracę wykonaną przez tę siłę pomiędzy punktami $(x = A, y = 0)$ i $(x = 0, y = B)$ i energię potencjalną cząstki.
- 2) Sprawdzić działanie zasady równoważności energii kinetycznej i pracy.
- 3) Pokazać, że całkowita energia cząstki nie zależy od czasu.

Zad. 2.

Kula bilardowa uderza w taką samą kulę będącą w spoczynku. Wyznaczyć kąt między kierunkami ruchu kul po zderzeniu.

Literatura

1. I. W. Sawieliew, KURS FIZYKI T. 1 „Mechanika”, „Fizyka cząsteczkowa”, PWN, W-wa 1987 (lub nowsze wydania).
2. A. K. Wróblewski, J. A. Zakrzewski, Wstęp do fizyki T. 1, PWN, W-wa 1984 (lub inne wydania).
3. A. Hennel, W. Krzyżanowski, W. Szuszkiewicz, K. Wódkiewicz, Zadania i problemy z fizyki T. 1, PWN, W-wa 1974 (lub inne wydania).
4. G. Białkowski, Mechanika klasyczna, PWN, W-wa 1975 (lub inne wydania).
5. A. Piekara, Mechanika ogólna, PWN, W-wa 1973 (lub inne wydania).
6. B. M. Jaworski, A. A. Piński T. 1, PWN, W-wa 1977 (lub inne wydania).
7. E. Karaśkiewicz, Zarys teorii wektorów i tensorów, PWN, W-wa 1976 (lub inne wydania).